

На правах рукописи



**Мухаметзянов Ильшат Ринатович**

**ОБ ОПТИМАЛЬНОМ ВДУВЕ В ТУРБУЛЕНТНЫЙ ПОГРАНИЧНЫЙ  
СЛОЙ В СВЕРХЗВУКОВЫХ ПОТОКАХ ГАЗА**

01.02.05 - Механика жидкости, газа и плазмы

**АВТОРЕФЕРАТ**  
диссертации на соискание ученой степени  
кандидата технических наук

Казань - 2014

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего профессионального образования «Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева - КАИ» (КНИТУ-КАИ) на кафедре специальной математики.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор  
**Гараев Кавас Гараевич.**

Официальные оппоненты: **Федяев Владимир Леонидович,**  
доктор технических наук, ФГБУН «Институт механики и машиностроения Казанского научного центра РАН», заведующий лабораторией «Моделирование технологических процессов»;

**Лалин Александр Васильевич,**  
доктор физико-математических наук, профессор, ФГАОУ ВПО «Казанский (Приволжский) федеральный университет», Институт вычислительной математики и информационных технологий, профессор кафедры математической статистики.

Ведущая организация: Открытое акционерное общество «Государственный ракетный центр имени академика В.П. Макеева», г. Миасс.

Защита состоится 28 января 2015 г. в 10 часов на заседании диссертационного совета Д212.079.02, созданного на базе ФГБОУ ВПО «Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева - КАИ», по адресу: 420111, г. Казань, ул. К. Маркса, д. 10.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ФГБОУ ВПО «Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева-КАИ» и на сайте <http://www.kai.ru/science/disser/index.phtml>.

Автореферат разослан «\_\_» \_\_\_\_\_ 2014 г.

Ученый секретарь  
диссертационного совета,  
кандидат технических наук, доцент



Каримова А.Г.

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

**Актуальность темы.** Работа посвящена решению задачи оптимального управления турбулентным пограничным слоем при сверхзвуковом обтекании пористой сферической лобовой поверхности летательного аппарата и цилиндрической поверхности посредством вдува газа в турбулентный пограничный слой.

Основными задачами теории пограничного слоя, имеющими практическую значимость, являются задачи о минимизации сопротивления, возникающего при обтекании тела вследствие трения жидкости (газа) о поверхность тела, и теплового потока между телом и обтекаемой жидкостью (газом).

Одним из способов, позволяющих влиять на характеристики пограничного слоя, является вдув газа, который используется как средство уменьшения трения и теплопередачи. С увеличением скорости вдува в направлении нормали к стенке тела напряжение трения на стенке значительно уменьшается, а в пограничном слое существенно возрастает, достигая максимума на некотором удалении от поверхности. При этом, если интенсивность вдува невелика, то сохраняются основные допущения теории пограничного слоя. Если же вдува нет, то максимум напряжения трения имеет место на стенке. Так как энергетические ресурсы (суммарный расход жидкости или газа, мощность системы управления вдувом) ограничены, то естественным образом возникает вариационная задача оптимального управления пограничным слоем. Таким образом получаем вариационные задачи с ограничениями на параметры вдува.

Практическое моделирование задач оптимально управляемого пограничного слоя сопряжено с определенными трудностями, связанными с вычислением распределенных и интегральных характеристик пограничного слоя в условиях аэродинамического эксперимента, и не позволяет реализовать различные состояния пограничного слоя в отличие от аналитических и численных методов.

Пионерская постановка задачи об оптимальном управлении ламинарным пограничным слоем принадлежит профессору Т.К. Сиразетдинову. Позднее, К.Г. Гараев в своих работах показал, что с математической точки зрения данный класс оптимальных задач аэрогидродинамики принадлежит к двумерным вариационным задачам типа Майера. Им же, с помощью инфинитезимального аппарата Ли–Овсянникова и теории инвариантных вариационных задач Э. Нетер, было доказано существование первого интеграла в ряде задач по оптимальному управлению ламинарным пограничным слоем, который в дальнейшем был успешно использован в работах А.А. Афанасьева, Ж.Ж. Жанабекова, А.Т. Лукьянова, Н.Г. Бильченко, В.А. Овчинникова, В.К. Кузнецова, Д.М. Осадчей и других авторов для решения широкого круга задач дозвукового и сверхзвукового обтекания. Следует отметить, что задачи сверхзвукового обтекания рассматривались значительно реже. К решенным задачам данного класса можно отнести задачу об оптимальном охлаждении

пористой криволинейной стенки и рассмотренные в приближенной постановке (в рамках аппроксимирующей системы) задачи о минимизации сопротивления трения для частных случаев обтекания клина, кругового конуса и цилиндра при ламинарном режиме течения.

В качестве ограничения в этих задачах выступала мощность системы управления вдувом, а для решения системы уравнений пограничного слоя применялся метод обобщенных интегральных соотношений А.А. Дородницына. Применение метода обобщенных интегральных соотношений для решения указанных задач определялось преимущественно тем, что для небольших номеров приближений этот метод характеризуется сравнительно низкими требованиями к вычислительным ресурсам. Очевидно, что для дальнейшего развития теории оптимального управления пограничным слоем и расширения области применения её результатов в инженерной практике необходимо введение в рассматриваемые вариационные задачи дополнительных (помимо мощности системы управления вдувом) ограничений.

Автору неизвестны работы по оптимальному управлению турбулентным пограничным слоем в сверхзвуковых потоках. Впервые указанная вариационная задача для точных уравнений пограничного слоя типа Прандтля поставлена в работе К.Г. Гараева, но она носит идейный характер. В указанной работе получен первый интеграл оптимально управляемого турбулентного пограничного слоя, однако непосредственно задача не решалась. В настоящей работе эта задача поставлена и решена впервые в рамках аппроксимирующей системы второго порядка в переменных А.А. Дородницына.

В настоящее время известно множество математических моделей турбулентного пограничного слоя (модель Меллора, модель Кармана и др.). Однако, использование существующих моделей для постановки и решения вариационных задач весьма затруднительно. Поэтому, в настоящей работе значительное внимание уделено разработке однослойной математической модели, на возможность реализации которой было указано в работах Л.Г. Лойцянского и И.К. Ротты. Модель, предложенная в настоящей работе, основана на классическом методе интегральных соотношений.

Из сказанного следует, что изучение вопроса оптимального управления турбулентным пограничным слоем актуально как с фундаментальной, так и с практической точек зрения.

**Цель работы.** Целью диссертационной работы является построение оптимальных законов вдува в турбулентный пограничный слой в сверхзвуковых потоках газа.

Для достижения этой цели необходимо решить следующие задачи:

- построить однослойную математическую модель сверхзвукового турбулентного пограничного слоя для различных законов зависимости вязкости от температуры в рамках аппроксимирующей системы второго приближения (в переменных А.А. Дородницына);
- выполнить расчеты локального теплового потока и трения на сферической лобовой поверхности летательного аппарата в рамках построенной модели;

- разработать и реализовать алгоритм построения законов распределения скорости вдува в турбулентный пограничный слой, обеспечивающий минимальное значение интегрального теплового потока, передаваемого от газа к обтекаемой поверхности, либо суммарного ньютоновского сопротивления трения при обтекании сферической лобовой поверхности летательного аппарата и цилиндрической поверхности сверхзвуковым потоком газа с учетом ограничения на мощность системы управления, которая рассчитывается с учетом фильтрационного закона Дарси.

**Научная новизна.** Научная новизна заключается в том, что:

- использованная в диссертации математическая модель для решения задачи управления тепловыми режимами на проницаемых участках сферической лобовой поверхности летательного аппарата и цилиндрической поверхности, обтекаемых сверхзвуковым турбулентным потоком, предложена впервые;

- поставлены (в рамках аппроксимирующей системы) и решены вариационные задачи по оптимальному управлению турбулентным пограничным слоем на сферической лобовой поверхности летательного аппарата и цилиндрической поверхности при сверхзвуковом режиме обтекания для различных законов зависимости вязкости от температуры;

- разработаны итерационный алгоритм и программный комплекс для ЭВМ «Оптимальное управление турбулентным пограничным слоем в сверхзвуковом потоке», позволяющий решать задачи оптимального управления сверхзвуковым турбулентным пограничным слоем на проницаемых поверхностях.

**Методы исследования.** В работе используются: методы математического моделирования; теория пограничного слоя при различных режимах течения; методы вариационного исчисления и оптимального управления; методы численного решения алгебраических и дифференциальных уравнений; метод обобщенных интегральных соотношений А.А. Дородницына.

**Достоверность исследований** обеспечивается корректным использованием метода обобщенных интегральных соотношений А.А. Дородницына, применением апробированных аналитических и численных методов, а также известных математических моделей. Адекватность предложенных моделей и алгоритмов подтверждается близостью полученных в настоящей работе результатов с результатами исследований других авторов.

**Практическая значимость** полученных результатов заключается в том, что разработанные модели, методы и программный комплекс для ЭВМ позволяют, во-первых, выполнить расчеты локального теплового потока и трения на поверхности сферы и прямого кругового цилиндра с достаточной для инженерной практики точностью; во-вторых, построить оптимальные законы вдува охладителя на пористой сферической лобовой поверхности летательного аппарата и цилиндрической поверхности при обтекании сверхзвуковым потоком. Результаты работы могут быть использованы в авиационной и ракетной технике при разработке систем активной тепловой защиты вдувом.

**Апробация работы.** Основные результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались на следующих научных конференциях, семинарах и конкурсах:

- Всероссийском семинаре по аналитической механике, устойчивости и управлению движением, посвященном столетию П.А. Кузьмина (г. Казань, 2008 г.);
- международной научной конференции «Образование, наука и экономика в вузах. Интеграция в международное образовательное пространство» (г. Плоцк, Польша, 2008 г.);
- XVII Школе-семинаре молодых ученых и специалистов под руководством академика РАН А.И. Леонтьева «Проблемы газодинамики и теплообмена в аэрокосмических технологиях» (г. Жуковский, 2009 г.);
- Всероссийской научно-практической конференции молодых ученых по современным проблемам математики и её прикладным аспектам (г. Пермь, 2010 г.);
- IV Всероссийском конкурсе молодых ученых «Итоги диссертационных исследований» (г. Миасс, 2012 г.);
- V Всероссийском конкурсе молодых ученых «Итоги диссертационных исследований» (г. Миасс, 2013 г.).

**Публикации.** Основные результаты диссертационной работы опубликованы в рекомендованных ВАК журналах (3 статьи), в трудах и материалах Международных и Всероссийских конференций, семинаров и конкурсов (6 тезисов), разработанный автором программный комплекс «Оптимальное управление турбулентным пограничным слоем в сверхзвуковом потоке» зарегистрирован в Федеральной службе по интеллектуальной собственности (РОСПАТЕНТ).

**Личный вклад автора в работу.** Под руководством д.ф.-м.н., профессора К.Г. Гараева автором сформулированы цели и задачи исследования. Автором лично построена новая математическая модель турбулентного пограничного слоя при сверхзвуковых режимах течения, выполнены сравнительные расчеты основных характеристик турбулентного пограничного слоя, разработан программный комплекс для ЭВМ «Оптимальное управление турбулентным пограничным слоем в сверхзвуковом потоке», проведены вычислительные эксперименты по управлению сверхзвуковым турбулентным пограничным слоем и выполнен анализ полученных результатов.

**Результаты работы, выносимые на защиту:**

- однослойная модель сверхзвукового турбулентного пограничного слоя, построенная в рамках аппроксимирующей системы второго приближения (в переменных А.А. Дородницына);
- постановка, необходимые условия оптимальности и алгоритм решения оптимальных задач по управлению турбулентным пограничным слоем на сфере и прямом круговом цилиндре в сверхзвуковом потоке с учетом ограничения на мощность системы управления вдувом;

- оптимальные законы вдува охладителя в сверхзвуковой турбулентный пограничный слой, реализующие минимальное значение ньютоновского сопротивления трения, либо интегрального теплового потока, действующего на сферическую лобовую поверхность летательного аппарата и цилиндрическую поверхность;

- комплекс программ, позволяющий реализовать предложенные методы и алгоритмы.

**Структура и объем диссертационной работы.** Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения, библиографического списка использованной литературы и приложений. Работа изложена на 130 страницах основного текста, приложения содержат 8 таблиц и 4 графика, библиография включает 149 наименований.

### СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Данная диссертация посвящена управлению турбулентным пограничным слоем при сверхзвуковых режимах течения.

**Во введении** обосновывается актуальность темы диссертации, даётся обзор литературы по теме исследования, определяются цели и задачи исследования, приводится перечень основных результатов, выносимых на защиту, а также структура диссертации.

**В первой главе** дается краткая характеристика наиболее распространенных методов расчета турбулентного пограничного слоя (конечно-разностный метод, интегральный метод). Показывается, что использование существующих моделей для постановки и решения вариационных задач весьма затруднительно. Анализируется, предложенная в настоящей работе, однослойная модель сверхзвукового турбулентного пограничного слоя, построенная в рамках аппроксимирующей системы второго приближения (в переменных А.А. Дородницына).

**Во второй главе** представлены результаты расчёта локального теплового потока и местного коэффициента трения при сверхзвуковых скоростях обтекания непроницаемой сферы с использованием предложенной математической модели турбулентного пограничного слоя сжимаемого газа для случаев, когда зависимость вязкости от температуры определяется по линейному закону, либо по нелинейным зависимостям: степенному закону и закону Сазерленда. Расчёт локального теплового потока и местного коэффициента трения на поверхности сферы произведен в предположении, что турбулентный режим начинается от критической точки. Задача решается с использованием метода обобщенных интегральных соотношений А.А. Дородницына. Для численного интегрирования системы обыкновенных дифференциальных уравнений применяется метод Рунге–Кутты четвертого порядка точности. Результаты вычислительных экспериментов сравниваются с результатами работы Р.А. Сафарова и Г.А. Тирского, которые получены на основе численного интегрирования конечно-разностным методом уравнений турбулентного пограничного слоя для случая обтекания сферы.

В разделе 2.1 дается постановка задачи. Уравнения турбулентного пограничного слоя на теле вращения берутся в виде:

$$\begin{aligned} \rho \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + \vartheta \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= -\frac{dp}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu_{\Sigma} \frac{\partial u}{\partial y} \right); \\ \frac{\partial}{\partial x} (\rho u r) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho \vartheta r) &= 0; \\ \rho \left( u \frac{\partial H}{\partial x} + \vartheta \frac{\partial H}{\partial y} \right) &= \frac{1}{Pr} \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu_{\Sigma} \frac{\partial H}{\partial y} \right) + \left( 1 - \frac{1}{Pr} \right) \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu_{\Sigma} u \frac{\partial u}{\partial y} \right); \\ p &= \rho R T. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь ось  $x$  направлена вдоль контура тела, ось  $y$  – перпендикулярна оси  $x$  по направлению внешней нормали;  $u, \vartheta$  – проекции вектора скорости на координатные оси;  $p$  – давление;  $\rho$  – плотность;  $T$  – температура газа;  $H = c_p T + u^2/2$  – полная энтальпия;  $c_p$  – теплоемкость при постоянном давлении;  $r(x)$  – радиус тела вращения;  $R$  – газовая постоянная;  $Pr$  – число Прандтля; эффективная вязкость газа  $\mu_{\Sigma}$  определяются по формуле Ван - Дриста, модифицированной Патанкармом и Сполдинггом:

$$\mu_{\Sigma} = \mu + \rho \chi^2 y^2 \left( 1 - \exp \left( -\frac{y \vartheta^*}{\nu A} \right) \right)^2 \frac{\partial u}{\partial y},$$

где  $\mu = \mu_0 \bar{T} b(\bar{T})$  – коэффициент динамической вязкости в ламинарном пограничном слое;  $\bar{T} = T/T_0$  – безразмерная температура;  $\nu$  – коэффициент кинематической вязкости;  $\chi = 0.4$ ;  $\vartheta^* = \sqrt{\tau_w / \rho}$  – динамическая скорость;

$A = 25.3 \left( \frac{\tau}{\tau_w} \right)^{-1/2}$ ,  $\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y}$  – локальное трение,  $\tau_w$  – трение на стенке; функция  $b(\bar{T})$  определяет зависимость вязкости от температуры; индекс «e» соответствует параметрам газа на внешней границе пограничного слоя; индекс «w» – на стенке; индекс «0» – в точке полного торможения потока.

Граничные условия к системе (2.1) возьмем в виде:

$$\begin{aligned} u = \vartheta = 0, \quad H = H_w(x), \quad (y = 0, x > 0); \\ u \rightarrow U_e(x), \quad H \rightarrow H_e(x), \quad (y \rightarrow \infty); \end{aligned} \quad (2.2)$$

где  $H_w = c_p T_w(x)$ ,  $T_w(x)$  – заданная температура наружной стороны обшивки.

Здесь и далее используются принятые в теории пограничного слоя обозначения. С использованием замены переменных, основанной на преобразованиях А.А. Дородницына

$$s = \frac{1}{l^3} \int_0^x \alpha_e (1 - \alpha_e^2)^{\gamma/(\gamma-1)} r^2 dx; \quad t = \frac{U_e \eta}{l \sqrt{V_{\max} l v_0}}; \quad \bar{u} = \frac{u}{U_e}; \quad \beta = \frac{1}{\alpha_e} \frac{d\alpha_e/ds}{1 - \alpha_e^2};$$



$$\eta = \int_0^y \frac{(1 - \alpha_e^2)^{\gamma/(\gamma-1)}}{\bar{T}} r dy; \quad \bar{w} = \sqrt{V_{\max} l^3} \frac{w}{U_e \sqrt{v_0}} + \frac{t \bar{u}}{U_e} \frac{dU_e}{ds}; \quad \alpha = \frac{u}{V_{\max}}; \quad \alpha_e = \frac{U_e}{V_{\max}}; \quad (2.3)$$

$$w = (1 - \alpha_e^2)^{-\gamma/(\gamma-1)} \frac{u}{r^2} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\vartheta}{\bar{T} r}; \quad \psi = 1 - \bar{T} - \alpha^2; \quad V_{\max} = V_{\infty} \sqrt{1 + \frac{2}{(\gamma-1) M_{\infty}^2}};$$

система (2.1) и условия (2.2) приводятся соответственно к виду

$$\begin{aligned} \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial s} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} &= \beta (1 - \psi - \bar{u}^2) + \frac{\partial}{\partial t} \left[ b_{\Sigma} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \right]; \\ \frac{\partial \bar{u}}{\partial s} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial t} &= 0; \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\bar{u} \frac{\partial \psi}{\partial s} + \bar{w} \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{1}{\text{Pr}} \frac{\partial}{\partial t} \left[ b_{\Sigma} \frac{\partial \psi}{\partial t} \right] + \alpha_e^2 \left( \frac{1}{\text{Pr}} - 1 \right) \frac{\partial}{\partial t} \left[ b_{\Sigma} \frac{\partial \bar{u}^2}{\partial t} \right];$$

где  $b_{\Sigma} = \frac{\mu_{\Sigma}}{\mu_0 \bar{T}} = b(\bar{T}) + \frac{\rho \chi^2 y^2}{\mu_0 \bar{T}} \left( 1 - \exp\left(\frac{-y \vartheta^*}{\nu A}\right) \right)^2 \frac{\partial u}{\partial y}$ .

$$\begin{aligned} \bar{u} = 0, \quad \bar{w} = 0, \quad \psi = 1 - \bar{T}_w \quad \text{при } t = 0; \\ \bar{u} \rightarrow 1, \quad \psi \rightarrow 0 \quad \text{при } t \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (2.5)$$

При выводе системы (2.4) зависимость вязкости от температуры предполагается произвольной, также предполагается постоянство безразмерной температуры газа на стенке  $\bar{T}_w = T_w/T_0$ , которое можно достичь, например, профилированием внутреннего контура стенки.

С использованием метода обобщенных интегральных соотношений А.А. Дородницына, краевая задача (2.4), (2.5) приводится к аппроксимирующей системе второго приближения:

$$\begin{aligned} \theta'_0 &= -6\beta \left( \frac{7\theta_1}{6} + \frac{9\theta_0}{6} - \frac{5\omega_1}{3} - \frac{4\omega_0}{3} \right) + \bar{q} \left( \frac{34b_{\Sigma_0}}{\theta_0} - \frac{32b_{\Sigma_1}}{\theta_1} \right); \\ \theta'_1 &= 12\beta \left( \frac{\omega_0}{3} + \frac{2\omega_1}{3} - \frac{\theta_0}{3} - \frac{\theta_1}{2} \right) + \bar{q} \left( \frac{20b_{\Sigma_0}}{\theta_0} - \frac{16b_{\Sigma_1}}{\theta_1} \right); \\ \omega'_1 &= -6\beta \left( \frac{\omega_0}{6} + \frac{\omega_1}{2} - \frac{2\omega_1^2}{3\theta_1} - \frac{\omega_0^2}{6\theta_0} \right) + \bar{q} \left\{ \frac{6\omega_0 b_{\Sigma_0}}{\theta_0^2} + 6 \left( 1 + \frac{1}{\text{Pr}} \right) \times \right. \\ &\quad \times \left[ \frac{b_{\Sigma_0}}{6\theta_0} \left( 4 \frac{\omega_1}{\theta_1} - 3 \frac{\omega_0}{\theta_0} \right) - \frac{2b_{\Sigma_1} \omega_0}{3\theta_1 \theta_0} \right] - \frac{6b_{\Sigma_0}}{\text{Pr} \theta_0} \left( 4 \frac{\omega_1}{\theta_1} - 3 \frac{\omega_0}{\theta_0} \right) + 4 \left( \frac{1}{\text{Pr}} - 1 \right) \alpha_e^2 \frac{b_{\Sigma_1}}{\theta_1} \left. \right\}; \\ \omega'_0 &= -\theta_0 \bar{T}'_w + (1 - \bar{T}_w) \theta'_0. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Здесь  $\bar{q} = \bar{r}^2 \alpha_e (1 - \alpha_e^2)^{\gamma/(\gamma-1)}$ ;  $b_{\Sigma_0} = b_{\Sigma}|_{\bar{u}=0}$ ;  $b_{\Sigma_1} = b_{\Sigma}|_{\bar{u}=1/2}$ ;  $\bar{r} = \frac{r}{l}$ ;  $l$  – некоторый характерный размер (например, радиус сферы в случае её обтекания сверхзвуковым потоком).

Начальные условия для интегрирования системы обыкновенных дифференциальных уравнений (2.6) задаются формулами:

$$\theta_0 = \bar{\theta}_0 \bar{x}_0^2; \theta_1 = \bar{\theta}_1 \bar{x}_0^2; \omega_0 = \bar{\omega}_0 \bar{x}_0^2; \omega_1 = \bar{\omega}_1 \bar{x}_0^2; \quad (2.7)$$

где  $\bar{x}_0$  – достаточно близкая к нулю точка, а константы  $\bar{\theta}_0, \bar{\theta}_1, \bar{\omega}_0, \bar{\omega}_1$  находятся из решения системы

$$\begin{aligned} 2\bar{\theta}_0 &= -7\bar{\theta}_1 - 9\bar{\theta}_0 + 10\bar{\omega}_1 + 8\bar{\omega}_0 - \frac{32cb_{\Sigma_1}(0)}{\bar{\theta}_1} + \frac{34cb_{\Sigma_0}(0)}{\bar{\theta}_0}; \\ 2\bar{\theta}_1 &= -4\bar{\theta}_0 - 6\bar{\theta}_1 + 8\bar{\omega}_1 + 4\bar{\omega}_0 - \frac{16cb_{\Sigma_1}(0)}{\bar{\theta}_1} + \frac{20cb_{\Sigma_0}(0)}{\bar{\theta}_0}; \\ 2\bar{\omega}_1 &= -\bar{\omega}_0 - 3\bar{\omega}_1 + \frac{4\bar{\omega}_1^2}{\bar{\theta}_1} + \frac{\bar{\omega}_0^2}{\bar{\theta}_0} + \frac{6cb_{\Sigma_0}(0)\bar{\omega}_0}{\bar{\theta}_0^2} + 6c \left(1 + \frac{1}{\text{Pr}}\right) \times \\ &\times \left[ \frac{b_{\Sigma_0}(0)}{6\bar{\theta}_0} \left(4 \frac{\bar{\omega}_1}{\bar{\theta}_1} - 3 \frac{\bar{\omega}_0}{\bar{\theta}_0}\right) - \frac{2b_{\Sigma_1}(0)\bar{\omega}_0}{3\bar{\theta}_1\bar{\theta}_0} \right] - \frac{6cb_{\Sigma_0}(0)}{\text{Pr}\bar{\theta}_0} \left(4 \frac{\bar{\omega}_1}{\bar{\theta}_1} - 3 \frac{\bar{\omega}_0}{\bar{\theta}_0}\right); \\ \bar{\omega}_0 &= \bar{\theta}_0 (1 - \bar{T}_w(0)). \end{aligned} \quad (2.8)$$

В переменных А.А. Дородницына локальный тепловой поток на сфере определяется по формуле

$$q_w = \frac{\lambda_w T_0}{\bar{T}_w l} \sqrt{\frac{lV_{\max}}{v_0}} \alpha_e (1 - \alpha_e^2)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \frac{\bar{r}}{\theta_0} \left(3 \frac{\omega_0}{\theta_0} - 4 \frac{\omega_1}{\theta_1}\right). \quad (2.9)$$

Значение местного коэффициента трения, определённое по параметрам набегающего потока, находится по формуле

$$c_{f\infty} = \frac{2\tau_w}{\rho_\infty V_\infty^2}, \quad (2.10)$$

где  $\tau_w = \frac{\bar{r}}{\theta_0} \alpha_e^2 (1 - \alpha_e^2)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \frac{\mu_0 V_{\max}^2}{\sqrt{v_0 l V_{\max}}} b(\bar{T}_w)$  – это касательное напряжение трения на стенке.

Вычислительные эксперименты были проведены для случаев, когда зависимость вязкости от температуры определялась по линейному закону и по нелинейным зависимостям: степенному закону и закону Сазерленда.

Для случая линейной зависимости использовались соотношения

$$b_{\Sigma_0} = b(\bar{T}_w) = 1; \quad b_{\Sigma_1} = b(\bar{T}_1) + \varphi_1 (1 - \exp(-g_1))^2; \quad (2.11)$$

$$\text{где } b(\bar{T}_1) = 1; \varphi_1 = \frac{0.16\sqrt{\text{Re}_0}}{\bar{T}_1^3 \bar{r} \theta_1} Z_1^2; \quad g_1 = \frac{Z_1}{25.3} \sqrt{\frac{\sqrt{\text{Re}_0}}{\bar{T}_1^3 \theta_1 \bar{r} b(\bar{T}_1)}}; \quad \text{Re}_0 = \frac{lV_{\max}}{v_0}; \quad \bar{T}_1 = 1 - \frac{\omega_1}{\theta_1} - \frac{\alpha_e^2}{4};$$

$$Z_1 = (\theta_0 - \theta_1) \cdot \ln \frac{1}{2} + \frac{2\theta_0 - \theta_1}{2} + (\theta_1 - \theta_0) \alpha_e^2 \left( \frac{5}{8} + \ln \frac{1}{2} \right) + (\theta_1 - 2\theta_0) \frac{\alpha_e^2}{24} - \frac{\omega_0}{2} + \frac{\omega_0 - \omega_1}{4}.$$

Для случая степенного закона

$$b_{\Sigma_0} = b(\bar{T}_w) = \bar{T}_w^{(-S)}; \quad b_{\Sigma_1} = b(\bar{T}_1) + \varphi_1 (1 - \exp(-g_1))^2; \quad (2.12)$$

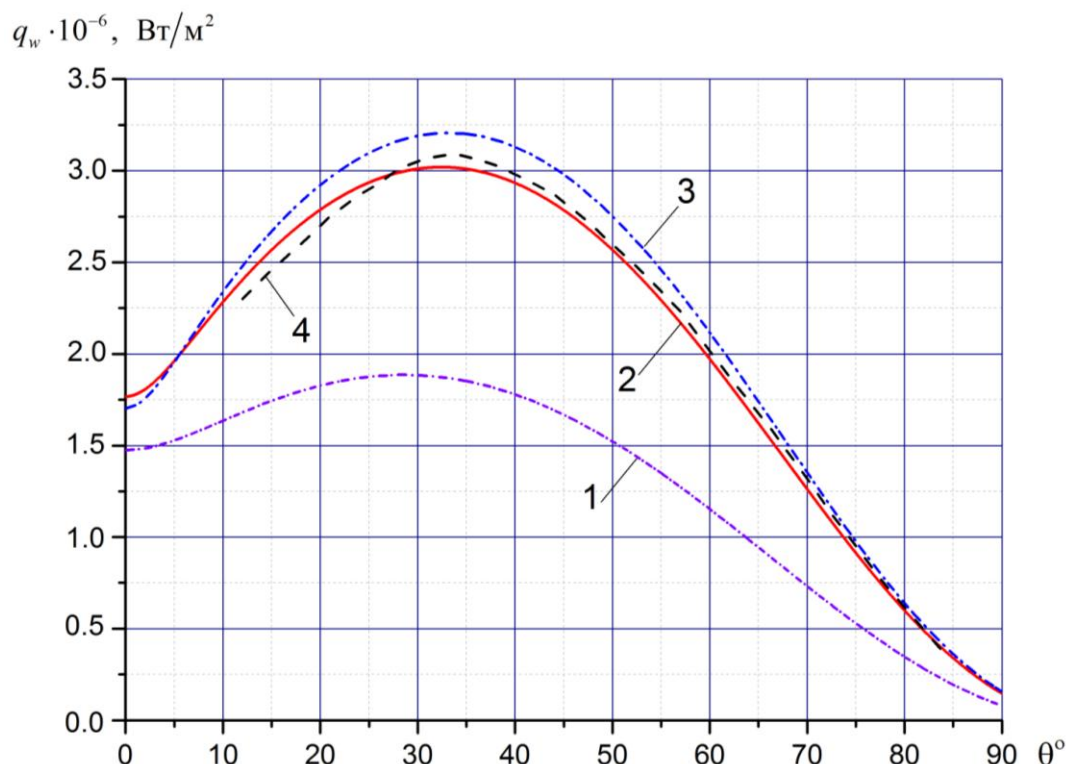
где  $b(\bar{T}_1) = \bar{T}_1^{(-S)}$ ;  $S = 0.3$ .

Для случая закона Сазерленда

$$b_{\Sigma_0} = b(\bar{T}_w) = \sqrt{1 - \frac{\omega_0}{\theta_0} \frac{1 + \frac{c_1}{T_0}}{1 - \frac{\omega_0}{\theta_0} + \frac{c_1}{T_0}}}; \quad b_{\Sigma_1} = b(\bar{T}_1) + \varphi_1 (1 - \exp(-g_1))^2; \quad (2.13)$$

где 
$$b(\bar{T}_1) = \sqrt{1 - \frac{\omega_1}{\theta_1} - \frac{\alpha_e^2}{4} \frac{1 + \frac{c_1}{T_0}}{1 - \frac{\omega_1}{\theta_1} - \frac{\alpha_e^2}{4} + \frac{c_1}{T_0}}}, \quad c_1 = 117 \text{ } ^\circ\text{C}.$$

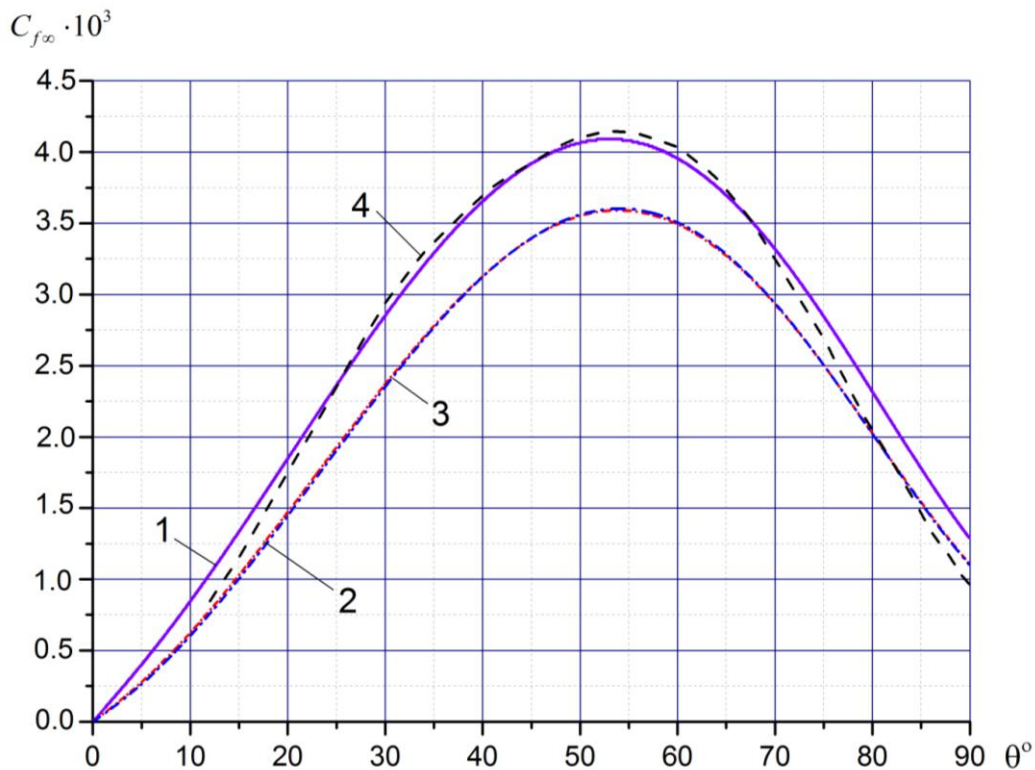
**В разделе 2.2** описывается вычислительный эксперимент по расчету характеристик турбулентного пограничного слоя, проведенный для случая обтекания непроницаемой сферы сверхзвуковым потоком воздуха. Вычислительный эксперимент проведен при следующих исходных данных: число Прандтля  $Pr = 0.87$ ; радиус сферы  $l = 0.535$  м; число Маха  $M_\infty = 11$ ; температурный фактор  $\bar{T}_w = 0.327$ ; параметры стандартной атмосферы соответствовали высоте 25000 м. Эти же данные были использованы в пионерской работе по интегрированию уравнений турбулентного пограничного слоя на сфере Р.А. Сафаровым и Г.А. Тирским. Однако, ими использовалась более сложная трехслойная модель Меллора.



**Рис. 1.** Распределение локального теплового потока  $q_w(\theta)$  на поверхности сферы

На рисунках 1 и 2 представлены результаты расчёта распределения величины локального теплового потока  $q_w(\theta)$  и местного коэффициента трения  $c_{f\infty}(\theta)$  на поверхности сферы, где  $\theta$  – центральный угол, отсчитываемый от её

передней критической точки. На этих графиках: линия 1 соответствует линейной зависимости вязкости от температуры; линия 2 – степенной зависимости; линия 3 – распределение по закону Сазерленда; линия 4 – результаты работы Р.А Сафарова и Г.А. Тирского.



**Рис. 2.** Распределение местного коэффициента трения  $c_{f\infty}(\theta)$  на поверхности сферы

Сравнивая результаты вычислительных экспериментов на рисунке 1 с данными работы Р.А. Сафарова и Г.А. Тирского видим, что нелинейные законы имеют достаточно хорошее согласование с результатами указанной работы. Линейный закон даёт по тепловому потоку заниженный результат.

Из рисунка 2 видно, что для местного коэффициента трения линейный закон даёт лучшее согласование, а нелинейные законы дают заниженные результаты.

**В третьей главе** рассматривается задача оптимального управления сверхзвуковым турбулентным пограничным слоем на сфере при линейной зависимости вязкости газа от температуры.

**В разделе 3.1** дается постановка вариационной задачи по минимизации теплового потока. Уравнения турбулентного пограничного слоя берутся в виде (2.1); граничные условия задаются в виде:

$$\begin{aligned} u &= 0, \quad \vartheta = m_w/\rho_w, \quad H = H_w \quad (y = 0); \\ u &\rightarrow U_e(x), \quad H \rightarrow H_e(x) \quad (y \rightarrow \infty); \\ u &\rightarrow U_e(0), \quad H \rightarrow H_e(0) \quad (x = 0, y > 0). \end{aligned} \quad (3.1)$$

Здесь  $m_w = (\rho\vartheta)_w$  – массовый расход вдуваемого газа (того же состава, что и в набегающем потоке) через единицу площади поверхности в единицу времени.

С помощью преобразований Степанова–Манглера–Дородницына:

$$\xi = \int_0^x (1 - \alpha_e^2)^{\gamma/(\gamma-1)} r^2 dx; \quad \eta = \int_0^y \frac{(1 - \alpha_e^2)^{\gamma/(\gamma-1)}}{\bar{T}} r dy;$$

уравнения (2.1) приводятся к виду:

$$u \frac{\partial u}{\partial \xi} + w \frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\bar{T}}{\bar{T}_e} U_e \frac{dU_e}{d\xi} + v_0 \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ b_\Sigma(\bar{T}) \frac{\partial u}{\partial \eta} \right];$$

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial w}{\partial \eta} = 0; \quad (3.2)$$

$$u \frac{\partial \vartheta}{\partial \xi} + w \frac{\partial \vartheta}{\partial \eta} = \frac{v_0}{\text{Pr}} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ b_\Sigma(\bar{T}) \frac{\partial \vartheta}{\partial \eta} \right] + v_0 \left( 1 - \frac{1}{\text{Pr}} \right) \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ b_\Sigma(\bar{T}) \frac{\partial \alpha^2}{\partial \eta} \right].$$

Здесь  $w = (1 - \alpha_e^2)^{-\gamma/(\gamma-1)} \frac{u}{r^2} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\vartheta}{\bar{T}r}$ ;  $\vartheta = \bar{T} + \alpha^2$ ;  $\bar{T} = T/T_0$ ;  $\alpha = \frac{u}{V_{\max}}$ ;  $\alpha_e = \frac{U_e}{V_{\max}}$ ;

$$V_{\max} = V_\infty \sqrt{1 + \frac{2}{(\gamma-1)M_\infty^2}}.$$

Граничные условия к системе (3.2) принимают вид:

$$u = 0, \quad w = \frac{m_w}{r\rho_0(1 - \alpha_e^2)^{\gamma/(\gamma-1)}}, \quad \vartheta = \vartheta_w \quad (\eta = 0);$$

$$u \rightarrow U_e(\xi), \quad \vartheta \rightarrow 1 \quad (\eta \rightarrow \infty);$$

$$u \rightarrow U_e(0), \quad \vartheta = 1 \quad (\xi = 0, \eta > 0).$$

Введем новые переменные:

$$\bar{s} = \frac{1}{V_{\max} l^3} \int_0^\xi U_e d\xi; \quad \bar{t} = \frac{U_e \eta}{l \sqrt{V_{\max}} l v_0}; \quad u = \bar{u} U_e; \quad w = \bar{w} \frac{U_e \sqrt{v_0}}{l}; \quad \bar{w} = \bar{u} \bar{t} \frac{\dot{U}_e}{U_e} + \bar{w} \sqrt{l V_{\max}}.$$

Тогда система (3.2) и условия (3.3) запишутся, соответственно, в виде:

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{s}} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} = \beta(1 - \psi - \bar{u}^2) + \frac{\partial}{\partial \bar{t}} \left[ b_\Sigma(\bar{T}) \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} \right];$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{s}} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{t}} = 0; \quad (3.4)$$

$$\bar{u} \frac{\partial \psi}{\partial \bar{s}} + \bar{w} \frac{\partial \psi}{\partial \bar{t}} = \frac{1}{\text{Pr}} \frac{\partial}{\partial \bar{t}} \left[ b_\Sigma(\bar{T}) \frac{\partial \psi}{\partial \bar{t}} \right] + \alpha_e^2 \left( \frac{1}{\text{Pr}} - 1 \right) \frac{\partial}{\partial \bar{t}} \left[ b_\Sigma(\bar{T}) \frac{\partial \bar{u}^2}{\partial \bar{t}} \right].$$

$$\bar{u} = 0, \quad \bar{w} = m(\bar{s})/q^*(\bar{s}), \quad \psi = 1 - \bar{T}_w \quad (\bar{t} = 0);$$

$$\bar{u} \rightarrow 1, \quad \psi \rightarrow 0 \quad (\bar{t} \rightarrow \infty);$$

$$\bar{u} = 1, \quad \psi = 0 \quad (\bar{s} = 0, \bar{t} > 0);$$

где  $m = \frac{(\rho\vartheta)_w}{\rho_0} \sqrt{\frac{l}{v_0 V_{\max}}}$ ;  $\beta = \frac{\dot{\alpha}_e}{\alpha_e(1 - \alpha_e^2)}$ ;  $q^* = \frac{r}{l} \alpha_e (1 - \alpha_e^2)^{\gamma/(\gamma-1)}$ .

На участке вдува  $[0; \bar{s}_k]$  единичной ширины мощность системы управления, рассчитанная с помощью закона Дарси, и функционал интегрального теплового потока записываются в виде:

$$N^* = \int_0^{\bar{s}_k} \frac{m^2 (1 - \psi_w)^2 l}{r \alpha_e (1 - \alpha_e^2)^{3\gamma/(\gamma-1)}} d\bar{s}; \quad (3.6)$$

$$Q^* = - \int_0^{\bar{s}_k} \left( b_\Sigma(\bar{T}) \frac{\partial \psi}{\partial \bar{t}} \right)_{\bar{t}=0} d\bar{s}. \quad (3.7)$$

Требуется среди непрерывных управлений  $m(\bar{s})$  найти такое, которое минимизирует значение функционала (3.7) при заданном ограничении на мощность системы управления (3.6) и условиях (3.4), (3.5).

В разделе 3.2 дается постановка вариационной задачи по минимизации сопротивления трения. Суммарное сопротивление трения, испытываемое обтекаемым телом, вычисляется по формуле:

$$X_T^* = \int_0^{\bar{s}_k} \alpha_e \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} \Big|_{\bar{t}=0} d\bar{s}. \quad (3.8)$$

Вариационная задача здесь ставится следующим образом: среди непрерывных управлений  $m(\bar{s})$  требуется отыскать такое, которое доставляет минимальное значение функционалу (3.8) при связях (3.4), (3.5) и изопериметрическом условии (3.6).

В разделе 3.3 приводятся необходимые условия оптимальности вариационной задачи по минимизации тепловых потоков. Записываются уравнения Эйлера–Лагранжа–Остроградского

$$\begin{aligned} & 2\beta u \lambda_1 + \lambda_3 \frac{\partial \psi}{\partial s} - u \frac{\partial \lambda_1}{\partial s} - \frac{\partial \lambda_2}{\partial s} - w \frac{\partial \lambda_1}{\partial t} - \lambda_1 \frac{\partial w}{\partial t} - b_\Sigma \left[ \frac{\partial^2 \lambda_1}{\partial t^2} + 2\alpha_e^2 \left( \frac{1}{\text{Pr}} - 1 \right) u \frac{\partial^2 \lambda_3}{\partial t^2} \right] - \\ & - 2\alpha_e^2 u \frac{\partial b_\Sigma}{\partial \bar{T}} \left\{ \left[ \frac{\partial \lambda_1}{\partial t} + 2\alpha_e^2 u \left( \frac{1}{\text{Pr}} - 1 \right) \frac{\partial \lambda_3}{\partial t} \right] \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\text{Pr}} \frac{\partial \lambda_3}{\partial t} \frac{\partial \psi}{\partial t} \right\} - \\ & - \frac{\partial b_\Sigma}{\partial \bar{T}} \left[ \frac{\partial \lambda_1}{\partial t} + 2\alpha_e^2 u \left( \frac{1}{\text{Pr}} - 1 \right) \frac{\partial \lambda_3}{\partial t} \right] = 0; \quad \lambda_1 \frac{\partial u}{\partial t} + \lambda_3 \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{\partial \lambda_2}{\partial t} = 0; \quad (3.9) \\ & \beta \lambda_1 - \frac{\partial b_\Sigma}{\partial \bar{T}} \left\{ \left[ \frac{\partial \lambda_1}{\partial t} + 2\alpha_e^2 u \left( \frac{1}{\text{Pr}} - 1 \right) \frac{\partial \lambda_3}{\partial t} \right] \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\text{Pr}} \frac{\partial \lambda_3}{\partial t} \frac{\partial \psi}{\partial t} \right\} - \\ & - \frac{\partial}{\partial s} (\lambda_3 u) - \frac{\partial}{\partial t} \left( \lambda_3 w + \frac{b_\Sigma}{\text{Pr}} \frac{\partial \lambda_3}{\partial t} \right) = 0. \end{aligned}$$

Из условий трансверсальности выводятся граничные условия для сопряженной системы (3.9)

$$\begin{aligned} & \lambda_1 = 0; \quad \lambda_3 = \text{Pr} \quad (t = 0); \\ & \lambda_1 \rightarrow 0; \quad \lambda_2 \rightarrow 0; \quad \lambda_3 \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow \infty); \\ & \lambda_1 = \lambda_3 = 0 \quad (s = s_k); \end{aligned} \quad (3.10)$$

и формула для определения оптимального управления

$$m = \frac{\lambda_2(s, 0)}{2\alpha q^* f^* (1 - \psi_w)^2}, \text{ где } f^* = l / \left( r\alpha_e (1 - \alpha_e^2)^{3\gamma/(\gamma-1)} \right). \quad (3.11)$$

**В разделе 3.4** задача оптимального управления рассматривается в рамках аппроксимирующей системы уравнений турбулентного пограничного слоя. В качестве ограничения в поставленной задаче выступает мощность системы управления вдувом газа.

Отметим, что аппроксимирующая система представляет собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений, полученную из исходных уравнений турбулентного пограничного слоя по методу обобщенных интегральных соотношений А.А. Дородницына. Погрешность вычисления характеристик пограничного слоя в данном случае не превышает 2%. Замена в алгоритме систем дифференциальных уравнений в частных производных аппроксимирующими системами позволяет значительно повысить эффективность алгоритма поиска оптимальных управлений при несущественной потере точности вычислений для пилотных исследований. Кроме того известно, что в ряде частных случаев для ламинарного режима течения анализ аппроксимирующих систем позволяет получать приближенные формулы для определения оптимальных управлений в аналитическом виде.

Вводится аппроксимирующая система второго приближения уравнений турбулентного пограничного слоя для проницаемой сферы:

$$\begin{aligned} \theta'_0 &= 18m\bar{r} - 6\beta \left( \frac{7\theta_1}{6} + \frac{9\theta_0}{6} - \frac{5\omega_1}{3} - \frac{4\omega_0}{3} \right) + \bar{q} \left( \frac{34b_{\Sigma_0}}{\theta_0} - \frac{32b_{\Sigma_1}}{\theta_1} \right); \\ \theta'_1 &= 12m\bar{r} + 12\beta \left( \frac{\omega_0}{3} + \frac{2\omega_1}{3} - \frac{\theta_0}{3} - \frac{\theta_1}{2} \right) + \bar{q} \left( \frac{20b_{\Sigma_0}}{\theta_0} - \frac{16b_{\Sigma_1}}{\theta_1} \right); \\ \omega'_1 &= 6m\bar{r} \frac{\omega_0}{\theta_0} - 6\beta \left( \frac{\omega_0}{6} + \frac{\omega_1}{2} - \frac{2\omega_1^2}{3\theta_1} - \frac{\omega_0^2}{6\theta_0} \right) + \bar{q} \left\{ \frac{6\omega_0 b_{\Sigma_0}}{\theta_0^2} + 6 \left( 1 + \frac{1}{\text{Pr}} \right) \times \right. \\ &\times \left[ \frac{b_{\Sigma_0}}{6\theta_0} \left( 4 \frac{\omega_1}{\theta_1} - 3 \frac{\omega_0}{\theta_0} \right) - \frac{2b_{\Sigma_1}\omega_0}{3\theta_1\theta_0} \right] - \frac{6b_{\Sigma_0}}{\text{Pr}\theta_0} \left( 4 \frac{\omega_1}{\theta_1} - 3 \frac{\omega_0}{\theta_0} \right) + 4 \left( \frac{1}{\text{Pr}} - 1 \right) \alpha_e^2 \frac{b_{\Sigma_1}}{\theta_1} \left. \right\}; \\ \omega'_0 &= -\theta_0 \bar{T}'_w + (1 - \bar{T}_w) \theta'_0; \text{ здесь } \bar{q} = \bar{r}^2 \alpha_e (1 - \alpha_e^2)^{\gamma/(\gamma-1)}; \bar{r} = r/l. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Начальные условия для интегрирования системы обыкновенных дифференциальных уравнений (3.12) определяются также, как и для системы (2.6), а константы  $\bar{\theta}_0$ ,  $\bar{\theta}_1$ ,  $\bar{\omega}_0$ ,  $\bar{\omega}_1$  находятся из решения следующей системы:

$$\begin{aligned} 2\bar{\theta}_0 &= 18m(0) - 7\bar{\theta}_1 - 9\bar{\theta}_0 + 10\bar{\omega}_1 + 8\bar{\omega}_0 - \frac{32cb_{\Sigma_1}(0)}{\bar{\theta}_1} + \frac{34cb_{\Sigma_0}(0)}{\bar{\theta}_0}; \\ 2\bar{\theta}_1 &= 12m(0) - 4\bar{\theta}_0 - 6\bar{\theta}_1 + 8\bar{\omega}_1 + 4\bar{\omega}_0 - \frac{16cb_{\Sigma_1}(0)}{\bar{\theta}_1} + \frac{20cb_{\Sigma_0}(0)}{\bar{\theta}_0}; \\ 2\bar{\omega}_1 &= 6m(0) \frac{\bar{\omega}_0}{\bar{\theta}_0} - \bar{\omega}_0 - 3\bar{\omega}_1 + \frac{4\bar{\omega}_1^2}{\bar{\theta}_1} + \frac{\bar{\omega}_0^2}{\bar{\theta}_0} + \frac{6cb_{\Sigma_0}(0)\bar{\omega}_0}{\bar{\theta}_0^2} + 6c \left( 1 + \frac{1}{\text{Pr}} \right) \times \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$\times \left[ \frac{b_{\Sigma_0}(0)}{6\bar{\theta}_0} \left( 4 \frac{\bar{\omega}_1}{\bar{\theta}_1} - 3 \frac{\bar{\omega}_0}{\bar{\theta}_0} \right) - \frac{2b_{\Sigma_1}(0)\bar{\omega}_0}{3\bar{\theta}_1\bar{\theta}_0} \right] - \frac{6cb_{\Sigma_0}(0)}{\text{Pr}\bar{\theta}_0} \left( 4 \frac{\bar{\omega}_1}{\bar{\theta}_1} - 3 \frac{\bar{\omega}_0}{\bar{\theta}_0} \right);$$

$$\bar{\omega}_0 = \bar{\theta}_0(1 - \bar{T}_w).$$

Функционал интегрального теплового потока, а также мощность системы управления вдувом в переменных системы (3.12) записываются соответственно в виде:

$$\tilde{Q} = \int_0^{\bar{x}_k} \frac{\bar{r}^2}{\theta_0} \left( 3 \frac{\omega_0}{\theta_0} - 4 \frac{\omega_1}{\theta_1} \right) \alpha_e (1 - \alpha_e^2)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} d\bar{x}; \quad (3.14)$$

$$\tilde{N} = \int_0^{\bar{x}_k} (1 - \alpha_e^2)^{\frac{2\gamma}{1-\gamma}} \bar{r} m^2(\bar{x}) d\bar{x}. \quad (3.15)$$

Вариационная задача ставится следующим образом: среди непрерывных законов вдува  $m(\bar{x})$  требуется найти такой, который реализует минимальное значение функционала (3.14) при дифференциальных связях (3.12) с начальными условиями (2.7) и изопериметрическом условии (3.15).

С использованием формализма Лагранжа выводятся необходимые условия оптимальности:

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda_1}{d\bar{x}} = & -\frac{\bar{r}^2}{\theta_0^2} \left( 3k - 4 \frac{\omega_1}{\theta_1} \right) \alpha_e (1 - \alpha_e^2)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} + \lambda_1 \left[ 6\beta \left( \frac{9}{6} - \frac{4k}{3} \right) + \bar{q} \left( \frac{34b_{\Sigma_0}}{\theta_0^2} + \frac{32}{\theta_1} \left( \frac{\partial b_{\Sigma_1}}{\partial \theta_0} \right) \right) \right] + \\ & + \lambda_2 \left[ -12\beta \left( -\frac{1}{3} + \frac{k}{3} \right) + \bar{q} \left( \frac{20b_{\Sigma_0}}{\theta_0^2} + \frac{16}{\theta_1} \left( \frac{\partial b_{\Sigma_1}}{\partial \theta_0} \right) \right) \right] + \\ & + \lambda_3 \left[ 6\beta \left( \frac{k}{6} - \frac{k^2}{6} \right) - \bar{q} \left\{ -\frac{6k}{\theta_0^2} b_{\Sigma_0} + 6 \left( 1 + \frac{1}{\text{Pr}} \right) \left[ -\frac{b_{\Sigma_0}}{6\theta_0^2} \left( 4 \frac{\omega_1}{\theta_1} - 3k \right) - \frac{2k}{3\theta_1} \left( \frac{\partial b_{\Sigma_1}}{\partial \theta_0} \right) \right] \right\} + \right. \\ & \left. + \frac{6b_{\Sigma_0}}{\text{Pr} \cdot \theta_0^2} \left( 4 \frac{\omega_1}{\theta_1} - 3k \right) + 4 \left( \frac{1}{\text{Pr}} - 1 \right) \alpha_e^2 \frac{1}{\theta_1} \left( \frac{\partial b_{\Sigma_1}}{\partial \theta_0} \right) \right]; \\ \frac{d\lambda_2}{d\bar{x}} = & \frac{\bar{r}^2}{\theta_0} \left( 4 \frac{\omega_1}{\theta_1^2} \right) \alpha_e (1 - \alpha_e^2)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} + \lambda_1 \left[ 7\beta - \bar{q} \left( \frac{32b_{\Sigma_1}}{\theta_1^2} - \frac{32}{\theta_1} \left( \frac{\partial b_{\Sigma_1}}{\partial \theta_1} \right) \right) \right] + \\ & + \lambda_2 \left[ 6\beta - \bar{q} \left( \frac{16b_{\Sigma_1}}{\theta_1^2} - \frac{16}{\theta_1} \left( \frac{\partial b_{\Sigma_1}}{\partial \theta_1} \right) \right) \right] + \lambda_3 \left[ 6\beta \left( \frac{2\omega_1^2}{3\theta_1^2} \right) - \bar{q} \left\{ 6 \left( 1 + \frac{1}{\text{Pr}} \right) \cdot \left[ \frac{b_{\Sigma_0}}{6\theta_0} \left( -4 \frac{\omega_1}{\theta_1^2} \right) + \right. \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{2k}{3\theta_1^2} b_{\Sigma_1} - \frac{2k}{3\theta_1} \left( \frac{\partial b_{\Sigma_1}}{\partial \theta_1} \right) \right] + \frac{6b_{\Sigma_0}}{\text{Pr} \cdot \theta_0} \left( 4 \frac{\omega_1}{\theta_1^2} \right) + 4 \left( \frac{1}{\text{Pr}} - 1 \right) \alpha_e^2 \left( -\frac{b_{\Sigma_1}}{\theta_1^2} + \frac{1}{\theta_1} \left( \frac{\partial b_{\Sigma_1}}{\partial \theta_1} \right) \right) \right\} \right]; \\ \frac{d\lambda_3}{d\bar{x}} = & -\frac{4\bar{r}^2}{\theta_1 \cdot \theta_0} \alpha_e (1 - \alpha_e^2)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} + \lambda_1 \left[ -10\beta + \bar{q} \frac{32}{\theta_1} \left( \frac{\partial b_{\Sigma_1}}{\partial \omega_1} \right) \right] + \end{aligned} \quad (3.16)$$



$$+ \lambda_2 \left[ -8\beta + \bar{q} \frac{16}{\theta_1} \left( \frac{\partial b_{\Sigma_1}}{\partial \omega_1} \right) \right] + \lambda_3 \left[ 6\beta \left( \frac{1}{2} - \frac{4\omega_1}{3\theta_1} \right) - \bar{q} \left\{ 6 \left( 1 + \frac{1}{\text{Pr}} \right) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \left[ \frac{b_{\Sigma_0}}{6\theta_0} \frac{4}{\theta_1} - \frac{2}{3} \frac{k}{\theta_1} \left( \frac{\partial b_{\Sigma_1}}{\partial \omega_1} \right) \right] - \frac{6b_{\Sigma_0}}{\text{Pr} \cdot \theta_0} \left( \frac{4}{\theta_1} \right) + 4 \left( \frac{1}{\text{Pr}} - 1 \right) \alpha_e^2 \frac{1}{\theta_1} \left( \frac{\partial b_{\Sigma_1}}{\partial \omega_1} \right) \right\} \right]; \text{ здесь } k = 1 - \bar{T}_w.$$

Из условий трансверсальности находятся граничные условия для сопряженной системы (3.16):

$$\lambda_1(\bar{x}_k) = \lambda_2(\bar{x}_k) = \lambda_3(\bar{x}_k) = 0. \quad (3.17)$$

Выводится формула для определения оптимального управления:

$$m(\bar{x}) = \frac{3(1 - \alpha_e^2)^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}}{\alpha} (3\lambda_1(\bar{x}) + 2\lambda_2(\bar{x}) + k\lambda_3(\bar{x})). \quad (3.18)$$

Поиск оптимального управления в виде алгоритма типа Пикара происходит по следующей схеме:

1. Задается управление  $m^{(0)}(\bar{x}) \equiv \text{const}$  в нулевом приближении; по формуле (3.15) вычисляется мощность системы управления вдувом  $\tilde{N}$ .
2. Интегрируется система (3.12) с начальными условиями (2.7) и вычисляется значение функционала (3.14).
3. Система (3.16) интегрируется с начальными условиями (3.17).
4. Согласно изопериметрическому условию (3.15) определяется множитель Лагранжа  $\alpha$ :

$$\alpha = \sqrt{\int_0^{\bar{x}_k} 9\bar{r} (1 - \alpha_e^2)^{2\gamma/(\gamma-1)} (3\lambda_1(\bar{x}) + 2\lambda_2(\bar{x}) + k\lambda_3(\bar{x}))^2 d\bar{x}} / \tilde{N}.$$

5. По формуле (3.18) определяется оптимальное управление в первом приближении  $m^{(1)}(\bar{x})$ .

6. Снова интегрируется система (3.12) при  $m(\bar{x}) = m^{(1)}(\bar{x})$ , решаются сопряженные уравнения (3.16), находится оптимальное управление  $m^{(2)}(\bar{x})$  во втором приближении и т.д. Вычислительный процесс заканчивается при обнаружении практической сходимости функционала (3.14).

Далее описывается вычислительный эксперимент, проведенный для случая обтекания сферы сверхзвуковым потоком воздуха при линейной зависимости вязкости от температуры. В расчёте варьировались: безразмерная температура газа на стенке и мощность системы управления вдуваемого газа.

На рисунке 3 представлены оптимальные законы вдува полученные по описанному алгоритму типа Пикара для случая:  $\text{Pr} = 0.87$ ;  $\bar{x}_0 = 10^{-3}$ ;  $\bar{x}_k = 1$ ;  $l = 0.05$  м;  $M_\infty = 7$ ;  $H = 10000$  м;  $\bar{T}_w = 0.25$ ;  $m^{(0)} = 0.4$ .

Максимальный выигрыш, полученный в значении функционала интегрального теплового потока, составил 31.82 %.

Анализ полученных данных позволяет выявить, что выигрыш увеличивается: с увеличением мощности системы управления, с ростом температурного фактора.

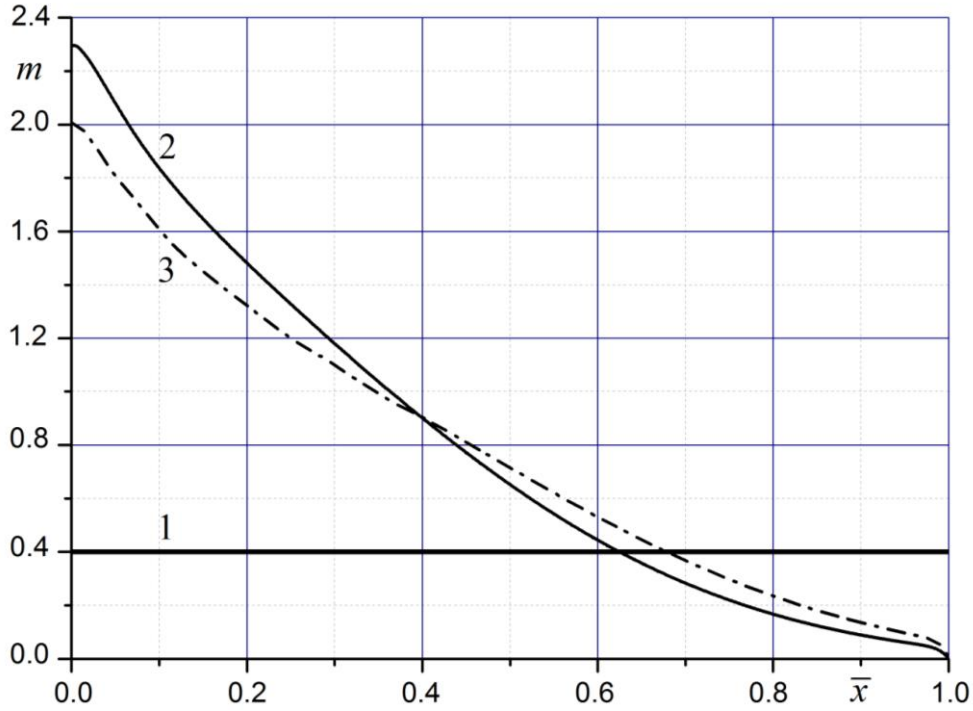


Рис. 3. Законы вдува: 1 – равномерный вдув; 2 – оптимальное управление в первом приближении; 3 – «предельное» оптимальное управление

В разделе 3.5 рассматривается задача минимизации сопротивления трения в приближенной постановке. Аппроксимирующая система второго приближения уравнений турбулентного пограничного слоя берется в виде (3.12), начальные условия к ней имеют вид (2.7). Предполагается, что зависимость вязкости от температуры распределена по линейному закону.

Функционал суммарного сопротивления трения с точностью до постоянного множителя в переменных системы (3.12) имеет вид:

$$\tilde{X}_T = \int_0^{\bar{x}_k} \frac{\bar{r}^2 \alpha_e^2 (1 - \alpha_e^2)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}{\theta_0} d\bar{x}. \quad (3.19)$$

Мощность системы управления оценивается функционалом (3.15). Вариационная задача ставится аналогично случаю минимизации функционала интегрального теплового потока.

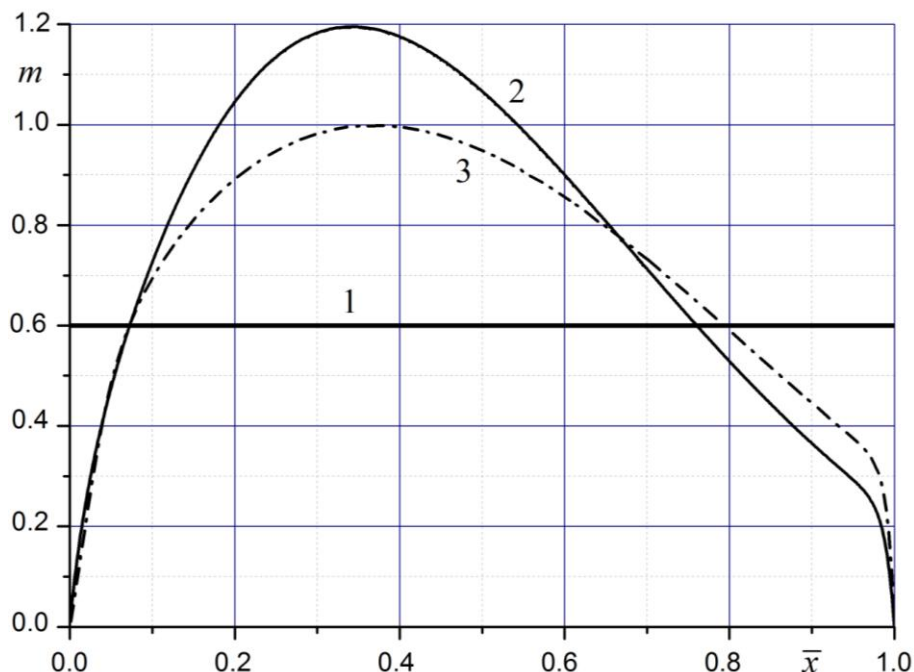
Уравнения Эйлера–Лагранжа запишутся для данного случая в виде:

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda_1(\bar{x})}{d\bar{x}} = & -\frac{\bar{r}^2}{\theta_0^2} \alpha_e^2 (1 - \alpha_e^2)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} + \lambda_1(\bar{x}) \left[ \beta(9 - 8k) + \bar{q} \left( \frac{34b_{\Sigma_0}}{\theta_0^2} + \frac{32}{\theta_1} \left( \frac{\partial b_{\Sigma_1}}{\partial \theta_0} \right) \right) \right] + \\ & + \lambda_2(\bar{x}) \left[ \beta(4 - 4k) + \bar{q} \left( \frac{20b_{\Sigma_0}}{\theta_0^2} + \frac{16}{\theta_1} \left( \frac{\partial b_{\Sigma_1}}{\partial \theta_0} \right) \right) \right] + \\ & + \lambda_3(\bar{x}) \left[ \beta(k - k^2) - \bar{q} \left\{ -\frac{6k}{\theta_0^2} b_{\Sigma_0} + 6 \left( 1 + \frac{1}{\text{Pr}} \right) \left[ -\frac{b_{\Sigma_0}}{6\theta_0^2} \left( 4 \frac{\omega_1}{\theta_1} - 3k \right) - \frac{2k}{3\theta_1} \left( \frac{\partial b_{\Sigma_1}}{\partial \theta_0} \right) \right] + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{6b_{\Sigma_0}}{\text{Pr} \cdot \theta_0^2} \left( 4 \frac{\omega_1}{\theta_1} - 3k \right) + 4 \left( \frac{1}{\text{Pr}} - 1 \right) \alpha_e^2 \frac{1}{\theta_1} \left( \frac{\partial b_{\Sigma_1}}{\partial \theta_0} \right) \right\} \right]; \quad (3.20) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda_2(\bar{x})}{d\bar{x}} &= \lambda_1(\bar{x}) \left[ 7\beta - \bar{q} \left( \frac{32b_{\Sigma_1}}{\theta_1^2} - \frac{32}{\theta_1} \left( \frac{\partial b_{\Sigma_1}}{\partial \theta_1} \right) \right) \right] + \lambda_2(\bar{x}) \left[ 6\beta - \bar{q} \left( \frac{16b_{\Sigma_1}}{\theta_1^2} - \frac{16}{\theta_1} \left( \frac{\partial b_{\Sigma_1}}{\partial \theta_1} \right) \right) \right] + \\ &+ \lambda_3(\bar{x}) \left[ 6\beta \left( \frac{2\omega_1^2}{3\theta_1^2} \right) - \bar{q} \left\{ 6 \left( 1 + \frac{1}{\text{Pr}} \right) \left[ \frac{b_{\Sigma_0}}{6\theta_0} \left( -4 \frac{\omega_1}{\theta_1^2} \right) + \frac{2}{3} \frac{k}{\theta_1^2} b_{\Sigma_1} - \frac{2}{3} \frac{k}{\theta_1} \left( \frac{\partial b_{\Sigma_1}}{\partial \theta_1} \right) \right] + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{6b_{\Sigma_0}}{\text{Pr} \cdot \theta_0} \left( 4 \frac{\omega_1}{\theta_1^2} \right) + 4 \left( \frac{1}{\text{Pr}} - 1 \right) \alpha_e^2 \left( -\frac{b_{\Sigma_1}}{\theta_1^2} + \frac{1}{\theta_1} \left( \frac{\partial b_{\Sigma_1}}{\partial \theta_1} \right) \right) \right\} \right]; \\ \frac{d\lambda_3(\bar{x})}{d\bar{x}} &= \lambda_1(\bar{x}) \left[ -10\beta + \bar{q} \frac{32}{\theta_1} \left( \frac{\partial b_{\Sigma_1}}{\partial \omega_1} \right) \right] + \lambda_2(\bar{x}) \left[ -8\beta + \bar{q} \frac{16}{\theta_1} \left( \frac{\partial b_{\Sigma_1}}{\partial \omega_1} \right) \right] + \\ &+ \lambda_3(\bar{x}) \left[ 6\beta \left( \frac{1}{2} - \frac{4\omega_1}{3\theta_1} \right) - \bar{q} \left\{ 6 \left( 1 + \frac{1}{\text{Pr}} \right) \left[ \frac{b_{\Sigma_0}}{6\theta_0} \frac{4}{\theta_1} - \frac{2}{3} \frac{k}{\theta_1} \left( \frac{\partial b_{\Sigma_1}}{\partial \omega_1} \right) \right] - \frac{b_{\Sigma_0}}{\text{Pr} \cdot \theta_0} \frac{24}{\theta_1} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 4 \left( \frac{1}{\text{Pr}} - 1 \right) \alpha_e^2 \frac{1}{\theta_1} \left( \frac{\partial b_{\Sigma_1}}{\partial \omega_1} \right) \right\} \right]; \text{ здесь } k = 1 - \bar{T}_w. \end{aligned}$$

Граничные условия для сопряженной системы (3.20) имеют вид (3.17). Оптимальное управление определяется по формуле (3.18). Поиск оптимального управления осуществляется также в виде алгоритма типа Пикара.

На рисунке 4 представлены оптимальные законы вдува для случая:  $\text{Pr} = 0.87$ ;  $\bar{x}_0 = 10^{-3}$ ;  $\bar{x}_k = 1$ ;  $l = 0.05$  м;  $M_\infty = 7$ ;  $H = 10000$  м;  $\bar{T}_w = 0.25$ ;  $m^{(0)} = 0.6$ . Выигрыш в значении функционала суммарного сопротивления трения в данном случае составляет 3.39%.



**Рис. 4. Законы вдува: 1 – равномерный вдув; 2 – оптимальное управление в первом приближении; 3 – «предельное» оптимальное управление**

При указанных данных проведен вычислительный эксперимент и для ламинарного ( $Pr = 0.74$ ) режима течения и получен выигрыш более 24%. Следовательно, для турбулентного пограничного слоя выигрыш в значениях функционала суммарного сопротивления трения существенно меньше, чем для ламинарного режима течения. Таким образом, для турбулентного пограничного слоя в качестве управления, близкого к оптимальному, можно принять равномерный закон вдува. Это более удобно с точки зрения его реализации в инженерной практике.

Максимальный выигрыш в значении функционала суммарного сопротивления трения для оптимальных управлений, по сравнению с равномерными законами вдува, полученный в процессе вычислительного эксперимента при турбулентном режиме течения составил 3.81%. Также отметим, что выигрыш в значении функционала увеличивается: с уменьшением температурного фактора, с увеличением мощности системы управления.

**В четвертой главе** рассматривается задача управления сверхзвуковым турбулентным пограничным слоем при обтекании сферической поверхности для случая, когда зависимость вязкости от температуры имеет степенной закон.

**В разделе 4.1** рассматривается вариационная задача по минимизации функционала интегрального теплового потока при обтекании сферического носка для случая степенной зависимости вязкости от температуры. Вычислительный эксперимент проводится аналогично случаю линейной зависимости. Строятся оптимальные законы вдува, приводятся результаты вычислительного эксперимента при варьировании безразмерной температуры газа на стенке  $\bar{T}_w$  и мощности системы управления вдувом  $\tilde{N}$ .

Анализ результатов вычислительных экспериментов по минимизации интегрального теплового потока для различных законов зависимости вязкости от температуры показывает, что использование более точного степенного закона зависимости вязкости от температуры даёт снижение выигрышей в значении функционала до 10 %. Выигрыш в значении функционала увеличивается: с увеличением мощности системы управления, с ростом температурного фактора.

Вычислительный эксперимент проведен также для следующей схемы обтекания: на участке  $[0^\circ, 12^\circ]$  пограничный слой ламинарный и вдув отсутствует, на участке  $[12^\circ, 60^\circ]$  пограничный слой турбулентный и присутствует вдув. Анализ полученных результатов показывает, что выигрыш в значении функционала интегрального теплового потока увеличивается и с увеличением длины участка вдува.

Выполнен расчет потребного расхода  $(\rho\vartheta)_w$  воздуха от координаты  $\bar{x}$  для равномерного вдува  $m^{(0)} = 0.4$  и «предельного» оптимального управления, полученного для случая минимизации функционала интегрального теплового потока, при различных значениях температурного фактора  $\bar{T}_w$  на стенке; для указанных случаев также выполнен расчет перепада давления над пористой

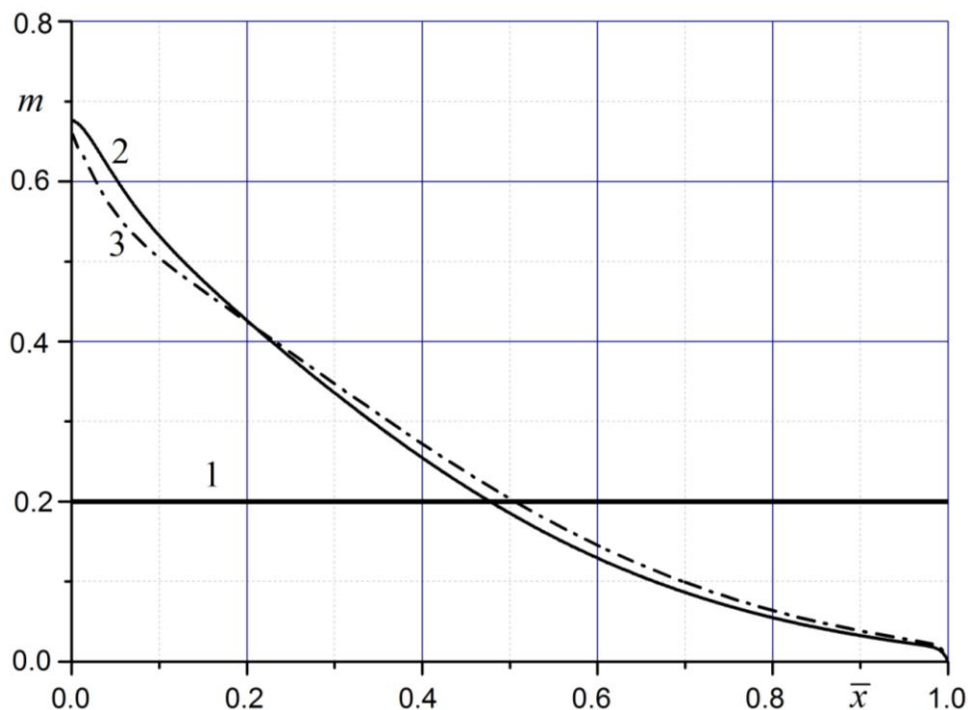
стенкой при различных значениях толщины  $h$  стенки, которая изготовлена из пористой коррозионно-стойкой стали 14X17H2.

**В разделе 4.2** описывается вычислительный эксперимент по построению оптимальных законов вдува обеспечивающих минимальное значение суммарного сопротивления трения на сферической поверхности при степенной зависимости вязкости газа от температуры. Вычислительный эксперимент проводится аналогично случаю линейной зависимости. Приводятся графики оптимальных управлений.

**В пятой главе** рассматривается задача оптимального управления турбулентным пограничным слоем на прямом круговом цилиндре при линейной и степенной зависимости вязкости газа от температуры.

**В разделе 5.1** получена аппроксимирующая система второго приближения для уравнений турбулентного пограничного слоя на прямом круговом цилиндре.

**В разделе 5.2** дается постановка и решение вариационной задачи по минимизации тепловых потоков. С использованием формализма Лагранжа выводятся необходимые условия оптимальности: записывается сопряженная система, начальные условия к ней и формула для определения оптимальных управлений. Приводятся соотношения для случая степенной и линейной зависимости вязкости газа от температуры. Описывается вычислительный эксперимент, проведенный для случая обтекания прямого кругового цилиндра сверхзвуковым потоком воздуха при различных зависимостях вязкости от температуры. В расчётах варьировались: безразмерная температура газа на стенке, мощность системы управления вдуваемого газа.



**Рис. 5.** Зависимость оптимальной скорости вдува от координаты: 1 – нулевое приближение; 2 – первое приближение; 3 – третье приближение

На рисунке 5 представлены оптимальные законы вдува, полученные по алгоритму типа Пикара при степенной зависимости вязкости от температуры, для случая:  $Pr = 0.87$ ;  $\bar{x}_0 = 10^{-3}$ ;  $\bar{x}_k = 1$ ;  $l = 0.05$  м;  $M_\infty = 7$ ;  $H = 10000$  м;  $\bar{T}_w = 0.25$ ;  $m^{(0)} = 0.2$ . Выигрыш в значении функционала интегрального теплового потока составляет 6.42%.

Максимальный выигрыш в значении интегрального теплового потока, полученный в процессе эксперимента, составляет 19.67% для случая степенной зависимости вязкости от температуры и 27.80% – для случая линейной зависимости. Анализ полученных данных позволяет выявить, что выигрыш в значении функционала интегрального теплового потока увеличивается: с увеличением мощности системы управления, с ростом температурного фактора.

В разделе 5.3 дается постановка и решение вариационной задачи по минимизации сопротивления трения. Вычислительный эксперимент проводится аналогично разделу 5.2.

На рисунке 6 представлена зависимость оптимальной скорости вдува от координаты для случая:  $\bar{T}_w = 0.25$ ;  $m^{(0)} = 0.6$  при линейной зависимости вязкости от температуры. Выигрыш в значении функционала ньютоновского сопротивления трения для этого случая составляет 1.28%.

Максимальный выигрыш в значении функционала ньютоновского сопротивления трения составляет 1.45% для случая степенной зависимости вязкости от температуры и 2.57% – для случая линейной зависимости. Анализ полученных данных позволяет выявить, что выигрыш в значении функционала увеличивается: с увеличением мощности системы управления, с уменьшением температурного фактора.

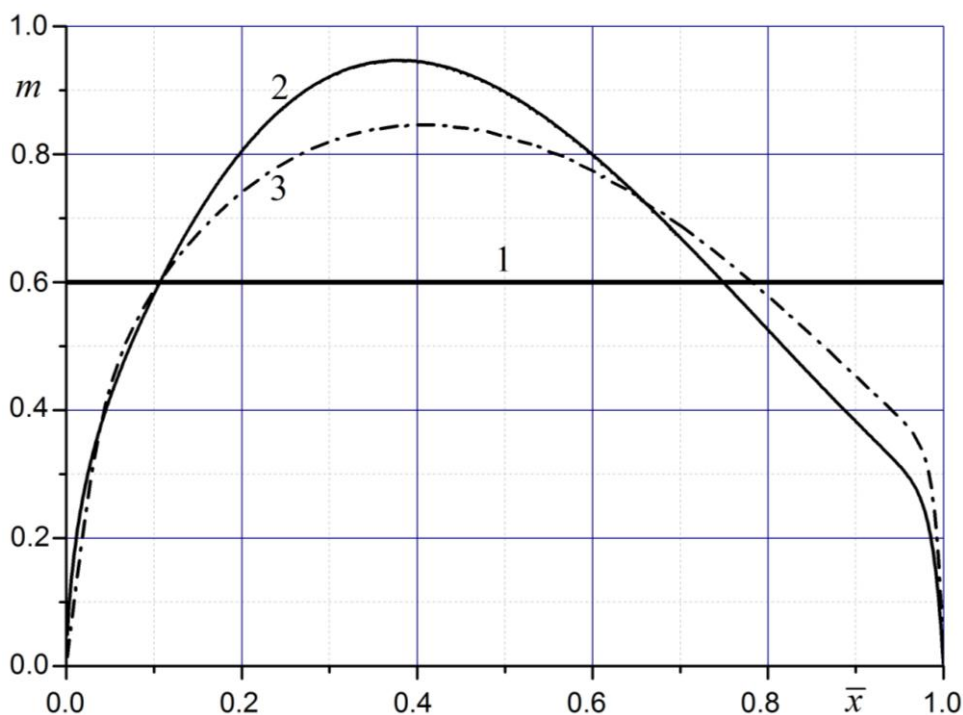


Рис. 6. Зависимость оптимальной скорости вдува от координаты: 1 – нулевое приближение; 2 – первое приближение; 3 – шестое приближение

**В разделе 5.4** получен критерий для интенсивности оптимального вдува на проницаемом участке поверхности при сверхзвуковом режиме обтекания, позволяющий использовать уравнения пограничного слоя для расчета трения и тепловых потоков.

Критерий «слабого» вдува получен в предположении о том, что инерционные и вязкостные члены должны быть эквивалентными малыми величинами при больших числах Рейнольдса:

$$\frac{\vartheta_w}{U_2} = O\left(\frac{1}{\sqrt{\text{Re}_2}}\right), \quad (5.1)$$

где  $\vartheta_w(x)$  – скорость вдува по нормали к поверхности;  $\text{Re}_2 = \frac{U_2 \cdot l}{\nu_2}$ ,  $\nu_2 = \frac{\mu_2}{\rho_2}$ , индекс «2» относится к параметрам газа за ударной волной.

Выполнена проверка критерия (5.1) для решенных в работе вариационных задач по оптимальному управлению турбулентным пограничным слоем.

## ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТЫ

1. Построена однослойная математическая модель сверхзвукового турбулентного пограничного слоя в рамках аппроксимирующей системы второго приближения (в переменных А.А. Дородницына), которая особенно удобна при постановке и решении вариационных задач минимизации интегрального теплового потока и ньютоновского сопротивления трения на поверхности сферы и прямого кругового цилиндра.

2. В рамках построенной модели поставлена и решена вариационная задача по минимизации функционала ньютоновского сопротивления трения на сфере и прямом круговом цилиндре для различных случаев зависимости вязкости от температуры. Получены необходимые условия оптимальности, предложен алгоритм построения оптимальных управлений. В качестве изопериметрического условия в указанной задаче выступает мощность системы управления вдувом, которая рассчитывается с использованием фильтрационного закона Дарси.

3. Поставлена и решена задача построения закона распределения скорости вдува в сверхзвуковой турбулентный пограничный слой обеспечивающего минимальное значение интегрального теплового потока на защищаемом участке сферической лобовой поверхности летательного аппарата и цилиндрической поверхности. В качестве ограничения в данной задаче выступает мощность системы управления вдувом. Задача решена также для различных случаев зависимости вязкости от температуры. Проведен вычислительный эксперимент по оптимизации тепломассообмена для случая сверхзвукового обтекания проницаемой сферы ламинарным пограничным слоем. Из результатов вычислительных экспериментов следует, что для ламинарного пограничного слоя выигрыш в значениях функционала интегрального теплового потока существенно больше, чем для турбулентного режима течения.

4. Предложен аэродинамический критерий «слабого» вдува в задачах оптимального управления пограничным слоем на проницаемых поверхностях, позволяющий использовать уравнения пограничного слоя для расчета трения и тепловых потоков.

5. На основе предложенных в работе алгоритмов и полученных теоретических результатов разработан комплекс программ по моделированию процесса сверхзвукового обтекания тел при наличии вдува в пограничный слой и расчету оптимальных законов распределения вдува. Программный комплекс по оптимальному управлению турбулентным пограничным слоем в сверхзвуковом потоке зарегистрирован в Федеральной службе по интеллектуальной собственности (РОСПАТЕНТ).

6. С использованием данного программного комплекса проведены вычислительные эксперименты по управлению сверхзвуковым турбулентным пограничным слоем на сфере и прямом круговом цилиндре для различных значений температурного фактора на стенке и мощности системы управления вдувом. Построены оптимальные законы вдува и рассчитаны характеристики пограничного слоя. Максимальный выигрыш, полученный в процессе вычислительных экспериментов, в значении функционала интегрального теплового потока составил 31.82% – для сферы, 27.80% – для прямого кругового цилиндра; в значении функционала ньютоновского сопротивления трения – 3.81% и 2.57% соответственно.

## **СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ**

### **В изданиях, рецензируемых ВАК:**

1. *Мухаметзянов И.Р.* Интегрирование уравнений турбулентного пограничного слоя на сфере в сверхзвуковом потоке / Гараев К.Г., Овчинников В.А., Мухаметзянов И.Р. // Вестник КГТУ им. А.Н. Туполева, 2009. №4. С. 62-65.

2. *Мухаметзянов И.Р.* Расчёт трения и теплового потока на сфере в турбулентном сверхзвуковом потоке // Известия высших учебных заведений. Авиационная техника, 2013. № 2. С. 43-46.

3. *Мухаметзянов И.Р.* К задаче оптимального управления турбулентным пограничным слоем на проницаемой сфере в сверхзвуковом потоке / Гараев К.Г., Мухаметзянов И.Р. // Вестник КГТУ им. А.Н. Туполева, 2014. №2. С. 160-167.

### **В других журналах и материалах научно-технических конференций и конкурсов:**

4. *Мухаметзянов И.Р.* Об одной задаче оптимального управления турбулентным пограничным слоем в сверхзвуковом потоке // Сборник Международной научной конференции «Образование, наука и экономика в вузах. Интеграция в международное образовательное пространство», г. Плоцк, Польша, Высшая школа им. Павла Влодковица, 2008. С. 490-493.

5. *Мухаметзянов И.Р.* Решение уравнений турбулентного пограничного слоя на цилиндре в сверхзвуковом потоке // Материалы Всероссийского семинара, посвященного столетию П.А. Кузьмина,



«Аналитическая механика, устойчивость и управление движением», Казань, 2008. С. 87-88.

6. *Мухаметзянов И.Р.* Интегрирование уравнений сжимаемого турбулентного пограничного слоя на сфере методом интегральных соотношений А.А. Дородницына // Труды XVII Школы-семинара молодых ученых и специалистов под руководством академика РАН А.И. Леонтьева «Проблемы газодинамики и тепломассообмена в аэрокосмических технологиях». 25-29 мая 2009 г., г. Жуковский. – М.: Издательский дом МЭИ, 2009. Т. 2. С. 106-109.

7. *Мухаметзянов И.Р.* Математическое моделирование вдува газа в турбулентный пограничный слой при сверхзвуковых скоростях // Материалы всероссийской научно-практической конференции молодых ученых «Современные проблемы математики и её прикладные аспекты», 12 марта 2010 г., Пермь, 2010. С. 113.

8. *Мухаметзянов И.Р.* Интегрирование уравнений турбулентного пограничного слоя на проницаемой сфере методом интегральных соотношений А.А. Дородницына // Материалы IV Всероссийского конкурса молодых ученых «Итоги диссертационных исследований», М.: РАН, 2012. Т.4. С. 3-10.

9. *Мухаметзянов И.Р.* Об оптимальном вдуве в пограничный слой в турбулентном сверхзвуковом потоке на проницаемых сферических телах // Материалы V Всероссийского конкурса молодых ученых «Итоги диссертационных исследований», М.: РАН, 2013. Т.4. С. 3-12.

**Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ:**

10. *Мухаметзянов И.Р.* Программный комплекс «Оптимальное управление турбулентным пограничным слоем в сверхзвуковом потоке» - М.: Федеральная служба по интеллектуальной собственности (РОСПАТЕНТ) – №2014611252 от 29.01.2014.

---

Подписано к печати 17.11.2014.  
Формат 60x84 1/16. Бумага офсетная. Печать цифровая.  
Усл. печ. л. 1,4. Тираж 100. Заказ Г86.

---

Копи-центр КНИТУ-КАИ.  
420111, г. Казань, ул. К. Маркса, д. 10