На правах рукописи

ХОРЬКОВ АЛЕКСАНДР ВЛАДИМИРОВИЧ

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ, АЛГОРИТМЫ И ПРОГРАММЫ ОПТИМИЗАЦИИ МНОГОКРАТНОГО ПОКРЫТИЯ ОГРАНИЧЕННЫХ МНОЖЕСТВ

Специальность:
05.13.18 – Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата технических наук

Казань 2019

Работа выполнена в федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования (ФГБОУ ВО) «Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева-КАИ» (КНИТУ-КАИ) на кафедре прикладной математики и информатики.

Научный руководитель: **Галиев Шамиль Ибрагимович**
доктор технических наук, профессор кафедры прикладной математики и информатики ФГБОУ ВО «Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева-КАИ».

Официальные оппоненты: **Заботин Игорь Ярославич**
доктор физико-математических наук, профессор кафедры анализа данных и исследования операций ФГАОУ ВО "Казанский (Приволжский) федеральный университет".

Кирпичников Александр Петрович
доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой интеллектуальных систем и управления информационными ресурсами ФГБОУ ВО «Казанский национальный исследовательский технологический университет».

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Уфимский государственный авиационный технический университет», г. Уфа.

Защита диссертации состоится «24» января 2020 года в $14^{\underline{00}}$ часов на заседании диссертационного совета Д 212.079.10, созданного на базе ФГБОУ ВО «Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева-КАИ» по адресу: 420111, г. Казань, ул. К. Маркса, 10.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке ФГБОУ ВО «Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева-КАИ» и на официальном сайте: http://old.kai.ru/science/disser/

Автореферат разослан «___» ____________ 2019 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 212.079.10, Каляшина Анна Викторовна
к.т.н., доцент

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы исследования. Задача покрытия заключается в таком размещении геометрических объектов, чтобы вся покрываемая ими область содержалась в объединении этих объектов. Для некоторых практических задач важно предусмотреть возможность многократного покрытия (k-покрытия, где $k \geq 1$). Под k-кратным покрытием понимается следующее: пусть дано ограниченное множество, если каждая точка этого множества принадлежит как минимум k покрывающим его фигурам, то считается что это множество покрыто k-кратно. Многократное покрытие применяется в практических задачах, где важно предусмотреть отказоустойчивость (то есть возможность выхода из строя некоторых элементов системы, например, сенсоров), а также для проектирования навигационных систем.

Важнейшим параметром оценки качества покрытия является плотность покрытия – отношение суммарной площади (меры) покрывающих фигур к площади (мере) покрываемой области. Для бесконечных областей плотность покрытия определяется как специально введенный предел указанного отношения.

Задачи покрытия находят важные приложения при исследовании различных практических задач. К ним сводятся задачи проектирования навигационных систем, поиска энергоэффективных расположений систем различного назначения, например, станций сотовой связи, беспроводного интернета, камер систем безопасности и мониторинга движения транспорта, а также расположений социально значимых объектов: станций скорой помощи, пожарных частей, отделений банков, торговых центров, больниц и других общественных зданий.

Следует отдельно отметить наиболее активно исследуемое на данный момент приложение задач покрытия – поиск оптимальных расположений сенсоров беспроводных сенсорных сетей (БСС) для мониторинга заданной области. В БСС сенсоры могут отслеживать, например, физические параметры (температура, освещенность, звук, давление, вибрация), химические (содержание тех или иных веществ в исследуемом объекте). БСС используются в концепции IoT (Internet Of Things), при мониторинге промышленных объектов, дорожного трафика, несущих элементов зданий, загрязнения воздуха и многого другого. Многочисленные указанные примеры показывают актуальность задач покрытия.

Степень разработанности темы исследования. Первые работы по задачам покрытия появились в начале 1900 годов. Оценка плотности покрытия плоскости исследовалась Р. Кершнером, С. Верблюнским, В.Дж. Бландоном, Л.Ф. Тотом, Г. Ф. Тотом, Дж. Молнаром, А. Флорианом. Различные проблемы задач покрытия исследовались в работах У.Г. Стояна, В.С. Брусова, С.А. Пиявского, З. Дрезнера, Х. Хамачера, Т.А. Алдын-оола, А.И. Ерзина, В.В. Залюбовского, С.Н. Астракова, А.В. Еремеева, Л.А. Заозерского, А.А. Колоколова, Ш.И. Галиева, М.А. Карповой и других.

Неулучшаемые (оптимальные) покрытия треугольника исследовались Х. Мелиссеном, П.С. Шуром, А. Хеппесом, Ж. Гаспаром, Т. Тарнаи. Покрытия круга исследовались К. Бездеком, Д. Наги, Г.Ф. Тотом, а покрытия квадрата – Т. Тарнаи, Ж. Гаспаром, П. Шуром, К.Дж. Нурмеллой, П.Р.Дж. Остергардом.

В основном, задачи покрытия рассматриваются с использованием евклидового расстояния, но имеются работы и по покрытиям в пространствах с неевклидовой метрикой, см. работы А.А. Лемперт и А.Л. Казакова.

Двойственной к задаче покрытия является задача упаковки. Она состоит в том, чтобы разместить максимальное число фигур в заданную область без перекрытия друг с другом. Эта задача исследовалась К.Дж. Нурмеллой, П.Р.Дж. Остергардом, А.Ф. Валеевой, Э.А. Мухачевой, Г.Ф. Тотом, Ш.И. Галиевым, М.С. Лисафиной и многими другими авторами.

В 1950-х годах США разработали сенсорные сети и использовали их в SOSUS (sound surveillance system) – системе акустических сенсоров на дне океана для слежки за подводными лодками СССР. Импульс исследованиям БСС дан в 1980-х годах американским агентством передовых оборонных исследовательских проектов DARPA, которое разработало распределенные сенсорные сети. В настоящий момент БСС активно развиваются благодаря широкой области применения. При исследовании БСС с точки зрения задач покрытий свой вклад внесли Н. Исмин, Ч. Чонг, С.П. Кумар, Б. Ванг, Н. Гупта, С. Янг, Ф. Даи, М. Кардеи, Дж. Ву, А. Шан, З. Ченг, Ю. Юн и многие другие.

Следует отметить, что в рассмотренных работах не обсуждаются вопросы зависимости кратности покрытия и размерности задачи, разрешимости, а также получение нижних оценок плотности покрытия ограниченных областей. В связи с тем, что задачи покрытия являются NP-трудными, одним из актуальных направлений исследований в настоящее время является разработка эффективных приближенных и эвристических методов.

Цель исследования – построение эффективно реализуемых методов решения задач многократного покрытия для дискретных и непрерывных случаев.

Задачи исследования:

1. Найти экстремальные многократные покрытия некоторых частных случаев покрываемых областей (квадрат, круг, треугольник).
2. Построить математические модели для оптимизации многократного покрытия, в том числе при наличии ограничений на расстояние между центрами

покрывающих кругов. Найти необходимые и достаточные условия разрешимости построенных математических моделей, разработать численные алгоритмы оптимизации покрытия заданных выпуклых ограниченных областей и алгоритмы решения построенных задач при больших размерностях.

3. Получить приближенные нижние оценки числа равных покрывающих кругов.
4. Построить математические модели и численные алгоритмы для оптимизации многократного покрытия кругами разных радиусов, в том числе и при наличии ограничений на расстояния между центрами покрывающих кругов. Найти достаточные условия разрешимости построенных математических моделей.
5. Получить приближенные нижние оценки плотности многократного покрытия кругами разных радиусов.
6. Разработать комплекс программ, реализующий предложенные алгоритмы. Провести численные расчеты и сравнить с известными результатами.

Научная новизна:

1. Установлены минимальные радиусы n равных кругов для k-кратного покрытия квадрата, равностороннего треугольника и круга для ряда значений n и k. Получены некоторые экстремальные k-покрытия квадрата кругами двух радиусов.
2. Представлена математическая модель k-покрытия заданной произвольной ограниченной выпуклой замкнутой области минимальным числом равных кругов заданного радиуса при наличии ограничений на минимально допустимые расстояния между центрами покрывающих кругов. Получены необходимые и достаточные условия разрешимости представленной математической модели. Разработан алгоритм нахождения требуемых многократных покрытий.
3. Разработан метод нахождения приближенных нижних оценок числа равных кругов для k-покрытия заданного произвольного ограниченного замкнутого выпуклого множества.
4. Построена математическая модель k-покрытия заданной произвольной ограниченной выпуклой замкнутой области кругами двух заданных радиусов при условии минимизации суммарной площади покрывающих кругов. Задача рассмотрена как без ограничений, так и с ограничениями на минимально допустимые расстояния между центрами покрывающих кругов. Получены достаточные условия разрешимости построенной математической модели. Разработан алгоритм нахождения требуемых многократных покрытий.

5. Разработан метод определения приближенного значения нижней границы плотности k-покрытия заданной произвольной ограниченной замкнутой выпуклой области кругами двух радиусов.
6. Разработан комплекс программ для решения задач многократного покрытия.

На защиту выносятся следующие научные результаты:

1. Некоторые экстремальные k-покрытия квадрата, равностороннего треугольника и круговой области равными кругами, а также квадрата кругами двух радиусов.
2. Математическая модель и алгоритм k-покрытия заданной произвольной ограниченной выпуклой замкнутой области минимальным числом равных кругов заданного радиуса, при наличии ограничений на минимально допустимые расстояния между центрами покрывающих кругов. Необходимые и достаточные условия разрешимости представленной математической модели.
3. Математическая модель и алгоритм k-покрытия заданной произвольной ограниченной замкнутой выпуклой области кругами двух заданных радиусов при условии минимизации суммарной площади покрывающих кругов, при наличии ограничений на минимально допустимые расстояния между центрами покрывающих кругов. Достаточные условия разрешимости построенной математической модели.
4. Метод определения приближенных нижних оценок числа равных кругов для k-покрытия заданного произвольного ограниченного замкнутого выпуклого множества.
5. Метод определения приближенного значения нижней границы плотности k-покрытия заданной произвольной ограниченной выпуклой замкнутой области кругами двух радиусов.
6. Комплекс программ для решения задач многократного покрытия.

Теоретическая значимость диссертации заключается в:

- разработке математических моделей и численных алгоритмов для оптимизации многократного покрытия кругами как равных, так и разных радиусов при наличии ограничений на минимальные расстояния между центрами покрывающих кругов;
- разработке методов определения приближенного значения нижней границы плотности покрытия кругами;
- нахождении необходимых и достаточных условий разрешимости математической модели задачи покрытия кругами равного радиуса и достаточных условий разрешимости математической модели задачи покрытия кругами двух радиусов.

Практическая значимость диссертации заключается в возможности использовать предложенные в работе математические модели и численные алгоритмы оптимизации k-покрытия произвольных заданных ограниченных замкнутых выпуклых областей на плоскости при решении различных практических задач.

Методы исследования. В работе использовались методы исследования операций, теория экстремальных задач, численные методы оптимизации. Для разработки комплекса программ, реализующего предложенные алгоритмы, использовался язык программирования C# и библиотека IBM ILOG CPLEX.

Достоверность результатов обеспечивается корректным применением математических методов, четкими и обоснованными ограничениями рассматриваемых задач, построением адекватных математических моделей. Предложенные в диссертационной работе математические модели и методы решения задач являются теоретически обоснованными, подтверждаются вычислительными экспериментами и не противоречат результатам других авторов.

Публикации. Материалы диссертационной работы опубликованы 17 научных работах, из них: 1 статья в журнале, индексируемом в базах Web Of Science, 1 статья в журнале, индексируемом в базах Scopus, 6 статей в журналах из перечня ВАК РФ, 7 работ в рецензируемых научных журналах и 2 в прочих изданиях.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались и обсуждались на международной молодежной научной конференции XXI, XXII Туполевские чтения (Казань, 2013, 2015), международной научно-практической конференции АКТО-2014 (Казань, 2014), международной научной конферценции "Optimization and applications" (OPTIMA-2014) (Петровац, Черногория, 2014), тринадцатой молодежной научной школе-конференции «Лобачевские чтения – 2014» (Казань, 2014), международной научной конференции The 3rd BRICS Mathematic conference (Иннополис, 2019). Также, результаты работы были представлены еще на двух международных конференциях.

Реализация результатов работы. Результаты исследования:

- используются при определении необходимого числа пунктов учета проезда транспортных средств на заданной области, а также при оптимизации расположения выбранного числа пунктов наблюдения за проездом транспортных средств для обеспечения бесперебойного контроля проезда транспорта на заданной области в отделе автомобильного транспорта Министерства транспорта и дорожного хозяйства Республики Татарстан;

- внедрены в учебный процесс при изучении дисциплины «Современные проблемы прикладной математики и информатики» в ФГБОУ ВО «Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева-КАИ».

Структура и объем диссертации.

Диссертация изложена на 125 страницах машинописного текста, содержит 30 рисунков и 7 таблиц. Состоит из введения, 4 глав, заключения, списка цитированной литературы из 132 наименований и 1 приложения на 2 страницах.

Личный вклад автора состоит в построении математических моделей и разработке численных алгоритмов оптимизации многократного покрытия заданных произвольных ограниченных замкнутых выпуклых областей на плоскости кругами, а также в выявлении и доказательстве некоторых случаев экстремальных k-покрытий. Автором лично предложена методика нахождения необходимых и достаточных условий разрешимости построенных математических моделей для k-покрытия кругами одного радиуса. Автор лично разработал комплекс программ для оптимизации многократного покрытия заданной области, с помощью которого им проведено множество численных расчетов и анализ полученных результатов. Автор принимал активное участие в оформлении полученных результатов в виде научных статей и докладов, причем вклад диссертанта был определяющим.

Диссертация соответствует паспорту специальности 05.13.18 «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ» по пунктам:

3. Разработка, обоснование и тестирование эффективных вычислительных методов с применением современных компьютерных технологий.
4. Реализация эффективных численных методов и алгоритмов в виде комплексов проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительного эксперимента.
8. Разработка систем компьютерного и имитационного моделирования.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обоснована актуальность диссертационного исследования, приведены основные научные положения и результаты.

В первой главе сформулированы задачи покрытия, представлены алгоритмы получения нужных покрытий и рассмотрены экстремальные покрытия квадрата, треугольника и круга заданным числом (n) кругов наименьшего возможного радиуса и с заданной кратностью покрытия (k).

Пусть G – ограниченное выпуклое замкнутое множество с непустой внутренностью на плоскости P. Сформулируем задачи покрытия.

Задача Z1. Требуется выбрать расположение n замкнутых кругов $K_j, 1 \leq j \leq n$, одинакового радиуса, образующих k-кратное покрытие G, таким образом, чтобы их радиус достигал наименьшего возможного значения $r_{n,k}^*$.

Для постановки следующей задачи на покрываемом множестве G построим прямоугольную сетку с шагом Δ по осям Ox и Oy. Пусть $T_\Delta = \{t_1, t_2, \ldots, t_m\}$ – множество узлов построенной сетки, $t_i \epsilon G, 1 \leq i \leq m$. Сформулируем задачу.

Задача Z2. Требуется k-кратно, $k \geq 1$, покрыть конечное множество $T_\Delta = \{t_1, t_2, \ldots, t_m\}$ минимальным числом кругов заданного радиуса так, чтобы центры покрывающих кругов находились в некоторых точках T_Δ. Полагаем, что $m \gg k$.

Для решения Z1 в диссертации представлен геометрический алгоритм A1.1, использующий многократные области Вороного. Далее в диссертационной работе предложен алгоритм A1.2, который использует сначала непрерывный геометрический подход (использование областей Вороного), далее дискретный подход (решение задачи целочисленного линейного программирования (ЛП), возможно, с использованием релаксации) и затем вновь непрерывный геометрический подход.

Для решения задачи Z2 в диссертации представлен алгоритм A1.3 – модификация распространенного подхода, состоящего в решении релаксированной задачи, построении ядерной задачи и её решении для целочисленных переменных. Для алгоритма A1.3 в диссертации представлен модифицированный алгоритм A1.3*, позволяющий задавать значение r исходя из предыдущих результатов решения задачи k-кратного покрытия множества G n кругами наименьшего возможного радиуса.

Указанные алгоритмы являются модификациями алгоритмов Ш.И. Галиева и М.А. Карповой. В диссертационной работе удалось упростить алгоритмы, удалив некоторые сложности, в частности, убрана процедура кластеризации с помощью нечёткого метода средних.

Используя алгоритмы A1.1–A1.3 и A1.3* получены приближенные значения $r_{n,k}$ радиусов кругов, при которых обеспечивается требуемое k-кратное покрытие указанных фигур для $n \leq 15$ и $1 \leq k \leq n$. Далее с использованием полученных численных результатов и геометрических рассуждений в диссертации доказаны следующие теоремы для покрытия треугольника.

Теорема 1. Пусть n равных кругов образуют k-кратное покрытие единичного равностороннего треугольника T, тогда $r_{n,n}^* = \sqrt{3}/3$;

пусть $n = 3m + q, m \geq 1, q$ равно 0, 1 или 2, тогда $r^*_{n,m+1} = r^*_{n,m+2} = \cdots = r^*_{n,m+m} = 1/2$;

для нечётных значений $k \geq 3$ при $n = k + (k+1)/2$ имеем $r^*_{n,k} = 1/2$;

пусть $n = 3m + q^*, m \geq 1, q^*$ равно 1, 2 или 3 и $k = n-1, n-2, \dots, n-m$, тогда $r^*_{n,k} = \sqrt{3}/3$.

Теорема 2. Пусть n равных кругов образуют k-кратное покрытие единичного равностороннего треугольника T. Тогда

если $n = 3k, k \geq 1$, то $r^*_{3k,k} = r^*_{3k+1,k} = \cdots = r^*_{3k+k-1,k} = \sqrt{3}/6$,

если k чётно, $k \geq 2$, то $r^*_{n,k} = 1/4$ при $n = 3k + 3k/2, 3k + 3k/2 + 1, \dots, 6k - 1$,

если k нечётно, $k \geq 3$, то $r^*_{n,k} = 1/4$ при $n = 5k - 1, 5k, 5k + 1, \dots, 6k - 1$.

В первой главе диссертации сформулированы и доказаны еще 5 теорем о покрытиях квадрата и круга.

С помощью разработанного комплекса программ и теорем из главы 1 найдены минимальные радиусы n кругов, которые обеспечивают k-кратное покрытие единичного квадрата, треугольника и круга. В таблице 1 представлены минимальные радиусы кругов, обеспечивающие k-кратное покрытие единичного квадрата для $n \leq 15$ и $1 \leq k \leq n$. Экстремальные значения радиусов (которые нельзя уменьшить) в данной таблице выделены жирным шрифтом.

Таблица 1 – Радиусы n кругов, обеспечивающие k-кратное покрытие единичного треугольника

n	k-кратность						
	1	2	3	4	5	6	7
1	$\boldsymbol{\sqrt{3}/3}$						
2	$\mathbf{1/2}$	$\boldsymbol{\sqrt{3}/3}$					
3	$\boldsymbol{\sqrt{3}/6}$	$\mathbf{1/2}$	$\boldsymbol{\sqrt{3}/3}$				
4	$\mathbf{1/(2+\sqrt{3})}$	$\mathbf{1/2}$	$\boldsymbol{\sqrt{3}/3}$	$\boldsymbol{\sqrt{3}/3}$			
5	$\mathbf{1/4}$	$\mathbf{1/2}$	$\mathbf{1/2}$	$\boldsymbol{\sqrt{3}/3}$	$\boldsymbol{\sqrt{3}/3}$		
6	$\mathbf{1/(\sqrt{3}/3)}$	$\boldsymbol{\sqrt{3}/6}$	$\mathbf{1/2}$	$\mathbf{1/2}$	$\boldsymbol{\sqrt{3}/3}$	$\boldsymbol{\sqrt{3}/3}$	
7	$\mathbf{0.18525}$	$\boldsymbol{\sqrt{3}/6}$	$\mathbf{1/2}$	$\mathbf{1/2}$	$\boldsymbol{\sqrt{3}/3}$	$\boldsymbol{\sqrt{3}/3}$	$\boldsymbol{\sqrt{3}/3}$
8	$\mathbf{0.17699}$	0.26343	$\mathbf{1/2}$	$\mathbf{1/2}$	$\mathbf{1/2}$	$\boldsymbol{\sqrt{3}/3}$	$\boldsymbol{\sqrt{3}/3}$
9	$\mathbf{0.16667}$	$\mathbf{1/4}$	$\boldsymbol{\sqrt{3}/6}$	$\mathbf{1/2}$	$\mathbf{1/2}$	$\mathbf{1/2}$	$\boldsymbol{\sqrt{3}/3}$
10	0.14434	$\mathbf{1/4}$	$\boldsymbol{\sqrt{3}/6}$	$\mathbf{1/2}$	$\mathbf{1/2}$	$\mathbf{1/2}$	$\boldsymbol{\sqrt{3}/3}$
11	0.14105	$\mathbf{1/4}$	$\boldsymbol{\sqrt{3}/6}$	$\mathbf{1/2}$	$\mathbf{1/2}$	$\mathbf{1/2}$	$\mathbf{1/2}$
12	0.13732	0.19245	0.26795	$\boldsymbol{\sqrt{3}/6}$	$\mathbf{1/2}$	$\mathbf{1/2}$	$\mathbf{1/2}$
13	0.13266	0.18968	0.25957	$\boldsymbol{\sqrt{3}/6}$	$\mathbf{1/2}$	$\mathbf{1/2}$	$\mathbf{1/2}$
14	0.12752	0.18525	$\mathbf{1/4}$	$\boldsymbol{\sqrt{3}/6}$	$\mathbf{1/2}$	$\mathbf{1/2}$	$\mathbf{1/2}$
15	0.11547	0.17810	$\mathbf{1/4}$	$\boldsymbol{\sqrt{3}/6}$	$\boldsymbol{\sqrt{3}/6}$	$\mathbf{1/2}$	$\mathbf{1/2}$

Радиусы покрывающих кругов, представленные в таблице 1, для кратности $k = 1$ полностью совпадают с опубликованными разными авторами результатами. Для $k > 1$ все результаты новые. Аналогично для случаев покрытия квадрата и круга.

Во второй главе предложена методика определения числа кругов заданного радиуса, их расположения и нахождения приближённых нижних оценок числа кругов для многократного покрытия произвольного заданного ограниченного выпуклого замкнутого множества с непустой внутренностью на плоскости.

Задачи покрытия равными кругами фиксированного радиуса формулируются следующим образом.

Задача Z3. Найти k-покрытие множества G кругами радиуса r таким образом, чтобы минимизировать число покрывающих кругов.

Задача Z4. Найти k-покрытие множества G кругами радиуса r таким образом, чтобы минимизировать число покрывающих кругов при условии, что центр каждого покрывающего круга совпадает с некоторой точкой множества T_Δ и каждая точка из T_Δ совпадает не более чем с одним из возможных центров кругов.

Задача Z5. Найти k-покрытие множества T_Δ кругами радиуса r таким образом, чтобы минимизировать число покрывающих кругов и расположить центр каждого покрывающего круга в T_Δ, при этом каждая точка из T_Δ должна совпадать не более чем с одним из возможных центров кругов.

Задача Z3 отличается от задачи Z1 тем, что в Z1 минимизируется радиус, а в Z3 минимизируется число кругов фиксированного радиуса.

Сначала рассмотрим задачу Z5. Пусть выбрана Δ и на G построено множество T_Δ. Введём параметр $\alpha, 0 \le \alpha < r,$ и определим

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{если } d(t_i, t_j) \le r - \alpha, \\ 0, \text{если } d(t_i, t_j) > r - \alpha. \end{cases} \tag{1}$$

Далее полагаем, что $\Delta \le r/4$. Определим переменные: z_i – число кругов радиуса $r - \alpha$, центры которых совпадают с точкой $t_i, 1 \le i \le n$. Построим задачу

$$z_1 + z_2 + \dots + z_n \to min \tag{2}$$

при ограничениях:

$$\begin{gathered} a_{11}z_1 + a_{12}z_2 + \dots + a_{1n}z_n \ge k, \\ \dots \\ a_{n1}z_1 + a_{n2}z_2 + \dots + a_{nn}z_n \ge k. \end{gathered} \tag{3}$$

$$z_i \in \{0,1\}, 1 \le i \le n. \tag{4}$$

Задача 0-1 ЛП (2)–(4) при $\alpha = 0$ решает проблему Z5.

Запишем ограничения на минимальные расстояния между центрами покрывающих кругов. Пусть для каждой точки t_i из T имеется p_i точек $t_j (i \neq j, 1 \leq j \leq n)$, для которых $d(t_i, t_j) < \lambda$. Определим коэффициенты

$b_{ij} = \begin{cases} 1, \text{если } d(t_i, t_j) < \lambda \\ 0, \text{если } d(t_i, t_j) \geq \lambda \end{cases}, i \neq j, 1 \leq i, j \leq n;\ b_{ii} = p_i, 1 \leq i \leq n$. И введем:

$$\begin{gathered} b_{11}z_1 + b_{12}z_2 + \cdots + b_{1n}z_n \leq p_1, \\ \cdots \\ b_{n1}z_1 + b_{n2}z_2 + \cdots + b_{nn}z_n \leq p_n. \end{gathered} \tag{5}$$

Ограничения (5) обеспечивают, чтобы расстояния между центрами покрывающих кругов были не меньше, чем λ. Решив задачу (2)–(4), (5) можно получить расположение покрывающих кругов с учётом минимальных расстояний между их центрами. Полагаем что λ выбрана таким образом, что задача (2)–(4), (5) имеет решение.

Во второй главе диссертации доказана следующая теорема. Пусть выбраны r, Δ и $\alpha = \Delta\sqrt{2}$.

Теорема 3. Существует m такое, что решение задачи (2)–(4) при

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{если } d(t_i, t_j) \leq r - \alpha/2^m, \\ 0, \text{если } d(t_i, t_j) > r - \alpha/2^m. \end{cases}$$

даёт минимальное число кругов $M = n_{\alpha/2^m}$ такое, что для любого $j \geq 1$ имеем $n_{\alpha/2^{m+j}} = M$. Эти M кругов радиуса $r - \alpha/2^m$ образуют k-покрытие множества $T_{\Delta/2^m}$, а при их радиусе, равном r, они образуют k-покрытие множества G.

Из теоремы 3 следует, что Z4 можно решить, используя задачу 0–1 ЛП (2)–(4) при соответствующем выборе Δ ($\Delta := \Delta/2^m$). Очевидно, решая указанную задачу 0–1 ЛП при выбранном Δ, получаем верхнюю оценку числа кругов для покрытия множества G. Под верхней границей числа кругов (или плотности) будем понимать полученное число кругов (или плотность). Величину Δ нужно выбирать достаточно малой, но при этом возрастает размерность указанной задачи. Признаком приемлемого выбора Δ может служить совпадение величин n_α и $n_{\alpha/2}$. Приближенное решение задачи Z4 примем за приближенное решение задачи Z3.

Для разрешимости задачи (2)–(4) необходимо и достаточно, чтобы для любой точки t_j из T_Δ существовало не менее k различных точек t_i из T_Δ, которые расположены от t_j на расстоянии не более чем радиус кругов, покрывающих T_Δ. Приведенное условие нетривиально проверять. В работе представлены легко проверяемые достаточные условия разрешимости указанных задач для выбранных множеств G.

Для решения построенных задач 0-1 ЛП больших размерностей предлагается следующий эвристический алгоритм А2.1:

1) Для задачи (2)–(4) построим релаксированную задачу, которая будет отличаться от исходной только тем, что ограничения целочисленности заменяются ограничениями $0 \le z_i, 1 \le i \le n$.

2) Решим построенную релаксированную задачу ЛП. Пусть найдено её решение и оптимальные значения переменных равны, соответственно, $z_1^*, z_2^*, \dots, z_n^*$. Если все $z_i^*, 1 \le i \le n$ равны 0 либо 1, то исходная задача 0–1 ЛП решена. Если среди z_i^* есть нецелочисленные значения, то переходим на шаг 3.

3) Упорядочим значения $z_i^*, 1 \le i \le n$, по невозрастанию. Зададим величину q и в упорядоченном массиве значений $z_i^*, 1 \le i \le n$, выберем q первых значений. Если среди q первых значений содержится только $v < p$ отличных от нуля, то к этим v ненулевым значениям добавляем $q - v$ нулевых значений $z_i^*, 1 \le i \le n$, выбранных случайным образом (по равномерному закону распределения). По такому же принципу осуществляется выборка, когда необходимо выбрать одно из нескольких одинаковых значений. Пусть указанным образом выбрали значения $z_j^*: z_{m1}^*, z_{m2}^*, \dots, z_{mq}^*$. Введем переменные $y_l, 1 \le l \le q$ и коэффициенты $b_{il} = a_{i,ml}$, где $1 \le i \le n, 1 \le l \le q$. Строим 0–1 задачу ЛП, так называемую, ядерную задачу:

$$\begin{aligned} & y_1 + y_2 + \dots + y_q \to min \\ & b_{11}y_1 + \dots + b_{1q}y_q \ge k, \\ & \qquad\qquad \dots \\ & b_{n1}y_1 + \dots + b_{nq}y_q \ge k, \\ & y_i \in \{0,1\}, 1 \le i \le q. \end{aligned}$$

4) Решим ядерную задачу. Пусть ядерная задача решена и найдены оптимальные значения $y_i: y_1^*, y_2^*, \dots, y_q^*$. Для каждого $y_l^* = 1$ полагаем соответствующее значение $z_{il}^* = 1$. Для остальных значений полагаем, что $z_{il}^* = 0$. Полученные результаты принимаются за решение задачи (2)–(4).

Величина q выбирается так, чтобы можно было решить ядерную задачу точным методом без привлечения эвристик и случайных процедур. В диссертационной работе величина Δ в большинстве случаев выбиралась равной 0.01. При такой Δ получаются задачи 0–1 ЛП с 10000 переменных. В ряде случаев решалась задача с 14000 переменными. При таких значениях размерности задачи величина q выбиралась равной 300 и полученные решения оказывались приемлемыми. Обоснование приведено в диссертации.

При введении ограничений (5) в диссертационной работе задача (2)–(4), (5) решается без эвристики. Можно решать, используя указанную эвристику, но при построении ядерной задачи необходимо преобразовать ограничения (5), используя новые переменные $y_l, 1 \leq l \leq q$.

Получим приближенные нижние границы числа покрывающих кругов. Пусть выбраны $r,\ \Delta > 0,\ k\ (1 \leq k \leq 4),\ \lambda = 3\Delta$ и определено $\beta = \Delta\sqrt{2}$ и T_Δ. В диссертации доказана следующая теорема.

Теорема 4. Пусть n_{opt} – минимальное число кругов радиуса r, которые обеспечивают k-покрытие множества G, когда минимальное расстояние между центрами покрывающих кругов не меньше λ, n_1 – минимальное число кругов радиуса $r + \beta$, полученное как решение задачи (2)–(4) при $\alpha = 0$ (и образующее k-покрытие T_Δ). Тогда

$$n_1 \leq n_{opt} \tag{6}$$

Соотношение (6) из теоремы 4 позволяет использовать следующую процедуру определения нижней оценки числа кругов для обеспечения k-покрытия $(1 \leq k \leq 4)$ заданной области G при условии, что минимально возможное расстояние между центрами кругов не меньше величины 3Δ. Решим задачу (2)–(4) для радиусов $r + \beta$, где a_{ij} определяются по (1) при $\alpha = 0$. Найденное число ненулевых z_i даёт нижнюю оценку числа кругов, обеспечивающих указанное k-покрытие области G. Например, рассмотрим покрытие единичного квадрата кругами радиуса 0.3. Выберем Δ последовательно равными 0.1, 0.05, 0.025 и 0.0125, тогда нижние оценки числа кругов для (однократного) покрытия получатся равными 4, 5, 5 и 6 соответственно. Известно, что минимально возможное число кругов равно 6. В диссертации проведен анализ того, как ограничения (5) влияют на число покрывающих кругов.

Также, в главе 2 представлены числа покрывающих кругов и их нижние оценки для покрытия квадрата, прямоугольника и круга при заданных значениях радиусов r кругов, полученные с помощью разработанного комплекса программ. Результаты представлены в таблице 2. В верхней строке (для выбранного r) приведена нижняя оценка числа кругов для $\lambda \geq 3\Delta$, затем полученное значение числа кругов при $\lambda \geq \Delta$. В нижней строке в скобках записаны нижняя оценка числа кругов для $\lambda \geq r/2$, затем полученное значение числа кругов при $\lambda \geq r/2$.

Таблица 2 – Числа кругов и их оценки для покрытия некоторых фигур при заданных радиусах r кругов

r	Кратность покрытия (k)								
	квадрата 1×1			прямоугольника 1.22×0.82			круга радиуса 0.5642		
	1	2	3	1	2	3	1	2	3
0.5	3/4 (3/4)	6/8 (6/8)	10/12 (10/12)	3/3 (3/3)	6/6 (6/6)	9/9 (9/10)	3/3 (3/3)	6/6 (6/6)	9/9 (9/10)

0.45	4/4 (4/4)	8/8 (8/8)	12/12 (12/12)	3/4 (3/4)	7/8 (7/8)	10/12 (10/12)	4/4 (4/4)	7/7 (7/7)	11/11 (10/11)
0.4	4/4 (4/4)	8/8 (8/8)	12/12 (12/12)	4/4 (4/4)	8/8 (8/8)	12/12 (12/13)	4/4 (4/5)	8/8 (8/9)	12/12 (12/13)
0.35	4/5 (4/5)	8/10 (8/10)	12/15 (13/16)	4/5 (4/5)	9/10 (9/10)	15/15 (15/16)	5/5 (5/5)	10/10 (9/11)	14/14 (14/16)
0.3	6/7 (6/7)	12/13 (12/14)	17/21 (17/21)	6/6 (6/6)	12/12 (12/12)	18/18 (18/19)	7/7 (6/7)	12/14 (12/14)	18/19 (18/21)
0.25	9/9 (9/9)	17/18 (17/18)	25/27 (25/28)	8/9 (8/9)	16/18 (16/19)	22/26 (23/28)	8/8 (8/9)	15/15 (15/18)	23/24 (23/28)

На рисунке 1 представлен пример покрытия прямоугольника кругами при наличии ограничений на минимальное расстояние между центрами покрывающих кругов, так и без них.

а) б)

Рисунок 1 – 2-покрытия прямоугольника кругами а) без ограничений на минимальное расстояние между центрами покрывающих кругов; б) при наличии ограничений

Числа кругов, полученные для однократного покрытия, полностью совпадают с результатами других авторов, которые были получены и опубликованы ранее. Таблица 2 показывает, что в ряде случаев полученные нижние и верхние границы чисел кругов совпадают, а это означает, что результаты не улучшаемы. В остальных случаях разница между верхней и нижней границами незначительна.

В третьей главе построена математическая модель задачи k-покрытия заданной произвольной ограниченной выпуклой замкнутой области кругами двух заданных радиусов r_1 и r_2 при условии минимизации суммарной площади покрывающих кругов. Задача рассмотрена как без ограничений, так и с ограничениями на минимально допустимые расстояния между центрами покрывающих кругов.

Пусть заданы (выбраны) G, r_1, r_2, k $(k \geq 1)$, Δ и построено T_Δ. Сформулируем новые задачи.

Задача Z6. Найти k-покрытие области G кругами заданных радиусов r_1 и r_2 с центрами в G таким образом, чтобы минимизировать суммарную площадь покрывающих кругов и определить расположение их центров в G.

Задача Z7. Найти k-покрытие области G кругами заданных радиусов r_1 и r_2 таким образом, чтобы минимизировать суммарную площадь покрывающих кругов и определить расположение их центров при условии, что центры кругов располагаются в точках построенного множества T_Δ и в каждой точке из T_Δ находится не более одного центра круга.

Задача Z8. Найти k-покрытие множества T_Δ кругами заданных радиусов r_1 и r_2 таким образом, чтобы минимизировать суммарную площадь покрывающих кругов и определить расположение их центров при условии, что центры покрывающих кругов могут располагаться только в точках множества T_Δ и в каждой точке из T_Δ находится не более одного центра круга.

Задача Z8 сводится к минимизации

$$(z_1 + \cdots + z_n) + \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 (z_{n+1} + \cdots + z_{2n}) \to min \tag{7}$$

при ограничениях:

$$\begin{gathered} a_{11}z_1 + a_{12}z_2 + \cdots + a_{1,2n}z_{2n} \geq k_1, \\ \cdots \\ a_{n1}z_1 + a_{n2}z_2 + \cdots + a_{n,2n}z_{2n} \geq k_n. \end{gathered} \tag{8}$$

$$z_i \in \{0,1\}, 1 \leq i \leq 2n. \tag{9}$$

Здесь k_j – заданная кратность покрытия точки $t_j, 1 \leq j \leq n$. Ограничения (8) обеспечивают покрытие каждой точки t_j из T_Δ не менее чем k_j кругами. Если $k_j = k, 1 \leq j \leq n$, то получим k-покрытие множества T_Δ. Если $z_i = 1$, то в точке t_i из T_Δ, $1 \leq i \leq n$, находится центр круга радиуса r_1. Если $z_{n+i} = 1$, то в точке t_i из T_Δ, $1 \leq i \leq n$, находится центр круга радиуса r_2. Для задачи построены достаточные условия разрешимости, когда рассматриваются заданные множества G.

Рассмотрим задачу Z7. Пусть выбрана величина шага Δ, построена прямоугольная сетка и множество T_Δ. При покрытии множества T_Δ кругами заданных радиусов r_1 и r_2 не гарантируется покрытие исходного множества G. Сетка с шагом Δ на множестве G порождает квадраты с диагональю равной $\Delta\sqrt{2}$. Если при решении дискретной задачи Z8 уменьшить величины радиусов r_1 и r_2 на половину указанной диагонали и решить задачу (7)–(9), то круги исходных радиусов r_1 и r_2 для полученного расположения кругов гарантированно покроют все множество G. Приближенное решение задачи $Z7$ можно получить, решая задачу Z8 для T_Δ с уменьшенными на $\alpha = \Delta\sqrt{2}/2$ величинами радиусов кругов, полагая затем, что найденные круги имеют радиусы r_1 и r_2. Таким образом, решение задачи Z7 считаем приближенным решением задачи Z6.

Уменьшая шаг сетки, мы получаем более точное решение исходной задачи Z7 или Z8. Но при этом растет размерность задачи и ее решение за приемлемое время становится проблематичным. Так как рассматриваемая задача является NP-трудной, то используются различные эвристические процедуры.

В диссертационной работе предлагается эвристический алгоритм решения задачи (7)–(9) для больших значений n. Для $n \leq 2000$ удается решать задачу без эвристик. Метод позволяет находить покрытия области G с заданной кратностью или покрытие G с переменной кратностью для каждой части области G таким образом, чтобы суммарная площадь покрывающих кругов была минимальной.

Решая задачу (7)–(9) с дополнительными ограничениями получаем требуемое покрытие, при котором расстояния между центрами покрывающих кругов будут на расстоянии не менее, чем заданная величина.

Для некоторых частных случаев покрытий найдены приближенные нижние границы плотностей k-покрытия заданной области. В каждом из указанных случаев задача покрытия сводится к задаче 0-1 ЛП.

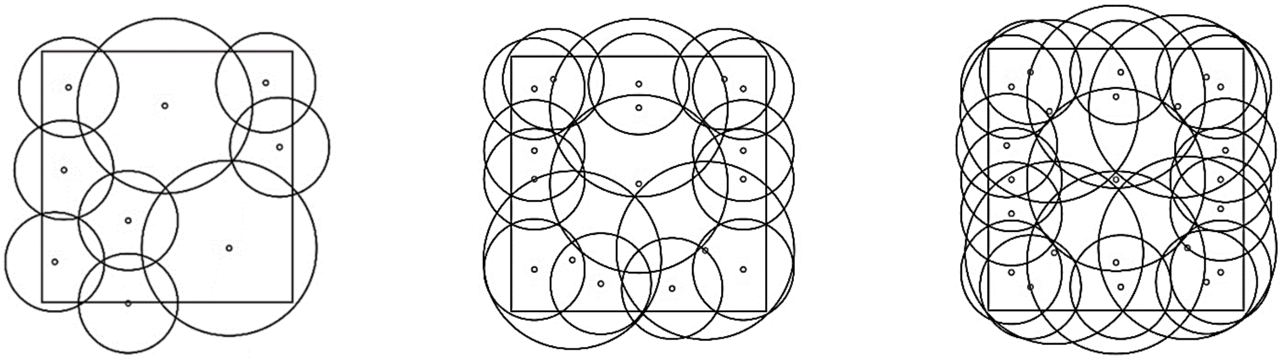
В данной главе представлены численные результаты покрытия единичного квадрата кругами заданных радиусов r_1 и r_2 таким образом, чтобы минимизировать плотность покрытия и определить расположение центров покрывающих кругов, а также некоторые другие численные результаты. Результаты покрытия единичного квадрата кругами радиусов r_1 и r_2 приведены в таблице 3. Косая линия используется для разделения количества кругов одного радиуса от другого. Все нижние оценки в таблице 3 выделены жирным шрифтом.

Таблица 3 – Покрытие квадрата для заданных радиусов и кратностей. Символ * – приближенные нижние оценки плотностей покрытия и соответствующие им числа кругов, # – полученные значения плотности покрытия и соответствующие им числа кругов

Радиусы кругов r_1/r_2	Кратность покрытия k					
	1		2		3	
	*	#	*	#	*	#
0.55/0.30	**1.697** **0/6**	1.697 0/6	**3.110** **0/11**	3.393 0/12	**5.089** **0/18**	5.475 1/16
0.55/0.25	**1.735** **1/4**	1.735 1/4	**3.307** **1/12**	3.472 2/8	**4.617** **3/9**	5.208 3/12
0.55/0.20	**1.453** **1/4**	1.453 1/4	**2.906** **2/8**	2.906 2/8	**4.162** **2/18**	4.359 3/12
0.45/0.30	**1.697** **0/6**	1.697 0/6	**3.110** **0/11**	3/393 0/12	**4.595** **1/14**	5.019 3/11
0.45/0.25	**1.570**	1.618	**3.142**	3.236	**4.516**	4.854

	0/8	1/5	**0/16**	2/10	**0/23**	3/15
0.45/0.20	**1.256** **0/10**	1.760 0/14	**2.780** **2/12**	3.142 0/25	**4.021** **0/32**	4.776 0/38
0.35/0.30	**1.539** **4/0**	1.697 0/6	**2.953** **4/5**	3.393 0/12	**4.390** **7/6**	5.113 3/14
0.35/0.25	**1.539** **4/0**	1.736 4/1	**2.898** **6/3**	3.472 8/2	**4.438** **10/3**	5.207 12/3
0.35/0.20	**1.524** **2/6**	1.524 2/6	**2.796** **4/10**	3.048 4/12	**4.178** **4/21**	4.572 6/18

Пример покрытия единичного квадрата кругами радиусов 0.35 и 0.20 при кратностях покрытия 1, 2 и 3 приведен на рисунке 2.



а) б) в)

Рисунок 2 – Покрытие единичного квадрата кругами радиусов 0.35 и 0.20: а) $k = 1$, количество кругов r_1 фиксировано и равно 2; б) $k = 2$; в) $k = 3$

Таблица 3 показывает, что в ряде случаев найденные нижние и верхние границы плотности покрытия совпадают, а это означает, что результаты не улучшаемы. В остальных случаях разница между нижней и верхней границами незначительна. Следовательно, предложенные методы эффективны и дают приемлемый результат.

В четвертой главе представлено описание, основные функции, структура и графический пользовательский интерфейс разработанного комплекса программ, реализующего разработанные алгоритмы оптимизации многократного покрытия из предыдущих глав.

Комплекс программ реализован на языке программирования C# в среде разработки Visual Studio 2015. Для решения задач ЛП использовалась библиотека IBM ILOG CPLEX. Представлена возможность использовать другие решатели задач ЛП: MSF, lp_solve. Комплекс программ состоит из четырех модулей: настроек, графического пользовательского интерфейса, вычислений и автоматического тестирования. Для построения графического интерфейса использовалась технология Windows Presentation Foundation (WPF).

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТЫ И ВЫВОДЫ

В диссертационной работе на основе проведенных автором исследований решена актуальная научная задача оптимизации многократных покрытий заданных произвольных ограниченных выпуклых замкнутых множеств. Необходимость повышения эффективности решения представленной задачи обуславливает разработку новых математических моделей, алгоритмов, методов и комплекса программ оптимизации многократных покрытий.

1) Установлены минимальные радиусы n равных кругов для k-кратного покрытия квадрата, равностороннего треугольника и круга для ряда значений n и k. Получены некоторые экстремальные k-покрытия квадрата кругами двух радиусов.
2) Построена математическая модель k-покрытия заданной произвольной ограниченной выпуклой замкнутой области минимальным числом равных кругов заданного радиуса, при наличии ограничений на минимально допустимые расстояния между центрами покрывающих кругов. Получены необходимые и достаточные условия разрешимости представленной математической модели. Разработан алгоритм нахождения требуемых многократных покрытий.
3) Разработан метод нахождения приближенных нижних оценок числа равных кругов для k-покрытия заданного произвольного ограниченного выпуклого замкнутого множества.
4) Построена математическая модель k-покрытия заданной произвольной ограниченной выпуклой замкнутой области кругами двух заданных радиусов при условии минимизации суммарной площади покрывающих кругов. Задача рассмотрена как без ограничений, так и с ограничениями на минимально допустимые расстояния между центрами покрывающих кругов. Получены достаточные условия разрешимости построенных математических моделей. Предложен алгоритм нахождения числа и расположения кругов для k-покрытия заданного множества.
5) Разработан метод определения приближенного значения нижней границы плотности k-покрытия заданной произвольной ограниченной выпуклой замкнутой области кругами двух радиусов.
6) Разработан комплекс программ для решения задач многократного покрытия, с помощью которого проведены многочисленные численные расчеты, часть из которых включена в диссертацию.

СПИСОК ОСНОВНЫХ ПУБЛИКАЦИЙ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

В рецензируемых журналах из списка ВАК РФ:

1. Галиев, Ш.И. Некоторые экстремальные многократные покрытия квадрата кругами / Ш.И. Галиев, А.В. Хорьков // Вестник КГТУ им. А.Н. Туполева. – 2014. – № 2. – С. 154-159.
2. Галиев, Ш.И. Многократные покрытия кругами равностороннего треугольника, квадрата и круга / Ш.И. Галиев, А.В. Хорьков // Дискретный анализ и исследование операций. – 2015. – Т. 22. – № 6. – С. 5-28.
3. Хорьков, А.В. Некоторые экстремальные *k*-покрытия квадрата кругами двух радиусов / А.В. Хорьков, Ш.И. Галиев // Вестник КГТУ им. А.Н. Туполева. – 2017. – № 3. – С. 139-142.
4. Галиев, Ш.И. Покрытие ограниченной области плоскости кругами заданного радиуса // Ш.И. Галиев, А.В. Хорьков // Вестник КГТУ им. А.Н. Туполева. – 2017. – № 4. – С. 157-163.
5. Хорьков, А.В. Оптимизация числа и расположения сенсоров для *k*-обзора заданной области / А.В. Хорьков, Ш.И. Галиев // Вестник КГТУ им. А.Н. Туполева. – 2018. – № 3. – С. 95-100.
6. Галиев, Ш.И. Сеточный метод решения задач упаковок и покрытий / Ш. И. Галиев, А. В. Хорьков // Вестник КГТУ им. А. Н. Туполева. – 2018. – № 4. – С. 106-111.

В журналах, индексируемых Scopus, Web of Science:

7. Галиев, Ш.И. О числе и расположении сенсоров для многократного покрытия ограниченной части плоскости / Ш.И. Галиев, А.В. Хорьков // Дискретн. анализ и исслед. опер. – 2019. – Т. 26, № 1. – С. 33-54. (*Версия на англ.яз (Scopus)*: Galiev, Sh.I. On the number and arrangement of sensors for the multiple covering of bounded plane domains / Sh.I. Galiev, A.V. Khorkov // Journal of Applied and Industrial Mathematics. – 2019. – Vol. 13, No. 1. – P. 43-53.)
8. Галиев, Ш.И. Оптимизация числа и расположения кругов двух радиусов для *k*-покрытия ограниченного множества / Ш.И. Галиев, А.В. Хорьков // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2019. – Т. 59, № 4. – С. 716-728. (*Версия на англ.яз (Web of Science)*: Galiev, Sh.I. Optimization of the Number and Arrangement of Circles of Two Radii for Forming a *k*-Covering of a Bounded Set / Sh.I. Galiev, A.V. Khorkov // Computational Mathematics and Mathematical Physics. – 2019. – Vol. 59, No. 4. – P. 676-687.)

В других журналах и материалах научных конференций:

9. Хорьков, А.В. Упаковка кругов разного радиуса в прямоугольник / А.В. Хорьков // Материалы конференции «XXI Туполевские чтения (школа молодых ученых)». – 2013. – № 1. – С. 422-423.
10. Хорьков, А.В. Трехкратное покрытие квадрата восемью кругами / А.В. Хорьков // Материалы Тринадцатой молодежной школы-конференции «Лобачевские чтения – 2014». – 2014. – С. 175-178.
11. Хорьков, А.В. Программа для оптимизации покрытия круга кругами минимального радиуса / А.В. Хорьков // Материалы международной научно-практической конференции АКТО-2014. – 2014. – № 2. – С. 653
12. Пчелкина, Е.С. Программа оптимизации многократного покрытия / Е.С. Пчелкина, А.В. Хорьков // Материалы международной научно-практической конференции АКТО-2014. – 2014. – № 2. – С. 654-655.
13. Galiev, Sh. Multiple coverings of triangle, square and circle by circles / Sh. Galiev, E. Pchelkina, A. Khorkov // Abstracts V International Conference on Optimization Methods and Applications (OPTIMA-2014). – 2014. – P. 72-73.
14. Хорьков, А.В. Обзор алгоритмов упаковки кругов в круг / А.В. Хорьков, Д.М. Пантюхина // Материалы конференции «Современные концепции развития науки». – 2015. – № 1. – С. 93-94.
15. Хорьков, А.В. Обзор алгоритмов упаковки кругов в прямоугольник / А. В. Хорьков // Материалы международной молодежной научной конференции «XXII Туполевские чтения (школа молодых ученых)». – 2015. – № 3. – С. 299-302.
16. Хорьков, А.В. Оптимизация расположения сенсоров для *k*-покрытия заданной области / А.В. Хорьков // Материалы международной молодежной научной конференции «XXII Туполевские чтения (школа молодых ученых)». – 2015. – № 3. – С. 303-304.
17. Хорьков, А.В. Многократное покрытие сенсорами заданной области / А.В. Хорьков, Р.Н. Латыпова // Материалы X международной научно-практической конференции «Актуальные направления фундаментальных и прикладных исследований». – 2016. – Vol. 1. – North Charleston, USA. – С. 68-69.

Формат 60×84 1/16. Бумага офсетная. Печать цифровая.
Усл. печ. л. 1,16. Тираж 120 экз. Заказ

Издательство КНИТУ-КАИ
420111, г. Казань, ул. К. Маркса, 10