

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность работы. В настоящее время в ряде областей машиностроения, в том числе, и в авиастроение широкое применение нашли конструкции, имеющие слоистую структуру. Такие структуры позволяют обеспечить элементам конструкции требуемую прочность, жёсткость и устойчивость при минимальном их весе. В одних случаях слоистые материалы состоят из слоёв, обладающих равными или почти равными жесткостными характеристиками (например, полимерные композиционные материалы), а в других случаях — материал может включать в себя существенно разнородные по жёсткости слои (например, «сэндвич»-панели). В последнем случае классические гипотезы Кирхгофа — прямолинейность, недеформируемость и ортогональность нормальных к срединной поверхности волокон при деформировании, позволяющие сводить трёхмерную задачу теории упругости или пластичности, — не дают возможности учесть поперечные сдвиги и нормальные к срединной поверхности деформации, которые будут существенны при деформировании слоистых структур, состоящих из материалов с резко различными механическими свойствами.

Настоящая работа является попыткой создания численных методик и алгоритмов и комплекса прикладных программ для расчёта и проектирования слоистых конструкций, учитывающих специфические особенности материалов.

Цель работы. Целью настоящего исследования является разработка математических моделей, алгоритмов и программного комплекса для проектировочных расчётов пространственных тонкостенных слоистых конструкций, слои которых обладают существенно разнородными физико-механическими характеристиками: расчёта напряжённо-деформированного состояния при действии статической и динамической нагрузки, расчёт форм и частот собственных колебаний, решение задач устойчивости. Создание пользовательского программного комплекса, в котором будут реализованы предложенные математические модели и алгоритмы.

Достижение поставленной цели требует решения следующих задач:

1. Разработка алгоритма формирования дискретной расчётной модели сложной составной тонкостенной слоистой конструкции, который позволил бы проводить расчёты проектных параметров как всей конструкции в целом, так и её отдельных элементов в составе всей конструкции.

2. Разработка математической модели и алгоритма проектировочного расчёта тонкостенных слоистых конструкций с существенно разнородными слоями под действием статической и динамической нагрузки, и расчёта на потерю устойчивости.

3. Разработка математической модели и алгоритма поиска собственных форм и частот колебаний тонкостенных слоистых структур, состоящих из материалов с резко различными жесткостными характеристиками.

4. Оптимизировать численные алгоритмы решения задач проектирования большой размерности, разработать дискретные расчётные модели и алгоритмы блочного формирования матрицы жёсткости и решения матричных уравнений статики и динамики тонкостенных слоистых структур.

5. Создание на основе разработанных моделей и алгоритмов комплекса прикладных программ для проектировочных расчётов тонкостенных слоистых конструкций, в том числе с существенно разнородными слоями, автоматизировать подготовку исходных данных и организацию процессов оптимизации проектных параметров. Апробация созданного программного комплекса.

Научная новизна состоит в том, что:

1. разработаны эвристические алгоритмы решения задач прочности тонкостенных слоистых структур с существенно разнородными слоями, в том числе потери устойчивости;

2. разработан алгоритм расчёта форм и частот собственных колебаний слоистых конструкций со слоями, выполненными из материалов с существенно различными жесткостными характеристиками.

Достоверность основных научных положений обеспечивается строгим математическим обоснованием математических подходов, результаты расчётов проанализированы с точки зрения их физической достоверности, сравнены в некоторых случаях с решениями на основе других методов.

Практическая значимость диссертации состоит в разработке и реализации на ПВЭМ

- алгоритмов, позволяющих проводить прочностные и жесткостные расчёты тонкостенных многослойных конструкций с существенно разнородными слоями;

- алгоритмов определения форм и частот собственных колебаний.

Проведено внедрение разработанного программного комплекса в конструкторском бюро.

Апробация работы. Основные положения и результаты работы докладывались и обсуждались на Всероссийской научной конференции «Информационные технологии в науке, образовании и производстве» (Казань, КГТУ им. А.Н. Туполева, 2007), на Международной научно-практической конференции «Современные технологии и материалы — ключевое звено в возрождении отечественного авиастроения» (Казань, КГТУ им. А.Н. Туполева, 2010), на VI Международной научно-технической конференции «Проблемы и перспективы развития авиации, наземного транспорта и энергетики» (Казань, КГТУ им. А.Н. Туполева, 2011).

Объём работы. Работа состоит из введения, трёх глав, заключения и списка использованной литературы из 128 наименований. Материал изложен на 118 страницах машинописного текста.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении представлен анализ современного состояния исследуемой проблемы, обоснованы актуальность и практическая ценность диссертации, сформулированы цель и задачи работы, её научная новизна и основные научные положения, выносимые на защиту. Дается краткий обзор литературы.

Первая глава посвящена проработке теоретических вопросов. Описывается дискретная математическая модель составной тонкостенной конструкции на

основе вариационного уравнения равновесия:

$$\sum_k \delta W_k + \delta \sum_n \mathbf{X}(\mathbf{u}_{(1)} - \mathbf{u}_{(2)}) - \sum_k \delta A_k + \sum_k \int_V \rho \delta R_{(k)} \frac{d^2 R_{(k)}}{dt^2} dV_k = 0, \quad (1)$$

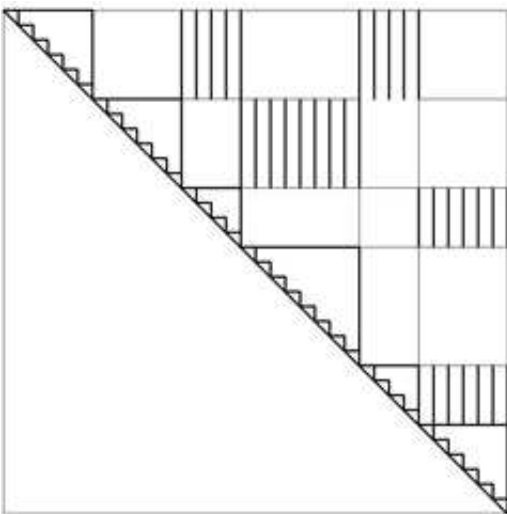
где $\sum_k \delta A_k$ и $\sum_k \int_V \rho \delta R_{(k)} \frac{d^2 R_{(k)}}{dt^2} dV_k$ - сумма виртуальных работ внешних и инерционных сил для отдельных частей составной конструкции с индексом k ; \mathbf{X} — обобщённые реакции взаимодействия пары звеньев; n — число точек сопряжения; $\mathbf{u}_{(1)}$, $\mathbf{u}_{(2)}$ — перемещения смежных точек сопрягаемых частей; $\sum_k \delta W_k$ — сумма виртуальных работ внутренних упругих сил всех частей составной конструкции.

Рассматривается формирование матриц жёсткости для отдельных частей, а также общей матрицы жёсткости всей конструкции. Матрицы имеют блочную структуру, что является удобным при решении динамических задач большой размерности. Матрицы жёсткости звеньев суммируются с матрицами инерционных коэффициентов и система уравнений решается методом исключения Гаусса без перестановки строк и столбцов и нарушения структуры общей матрицы жёсткости.

Для построения алгоритма решения статических задач большой размерности используется вариационное уравнение равновесия в следующем виде:

$$\sum_k \delta W_k + \delta \frac{1}{2} \sum_n K(\mathbf{u}_{(1)} - \mathbf{u}_{(2)})^2 - \sum_k \delta A_k + \sum_k \int_V \rho \delta R_{(k)} \frac{d^2 R_{(k)}}{dt^2} dV_k = 0. \quad (2)$$

Матричное уравнение равновесия, построенное на основе уравнения (2) имеет блочную структуру, решается методом исключения Гаусса без нарушения общей блочной структуры матрицы жёсткости и не содержит неизвестных реакций \mathbf{X} , сохраняя при этом преимущества уравнения (1).



Слагаемое $\delta \frac{1}{2} \sum_n K(\mathbf{u}_{(1)} - \mathbf{u}_{(2)})^2$ определяет

кинематические связи частей конструкции. Блочная матрица жёсткости конструкции состоит из диагональных матриц жёсткости суперэлементов и ненулевых внедиагональных блоков, определяющих связь суперэлементов между собой, рисунок 1. Это позволяет создать эффективный алгоритм решения задач большой размерности при расчёте проектных параметров отдельных элементов составных конструкций.

Излагается способ определения геометрии координатных поверхностей, построение интегрирующих и дифференцирующих матриц.

Описывается алгоритм формирования матричных уравнений равновесия составных тонкостенных конструкций при конечных перемещениях.

Описываются алгоритмы формирования упругих моделей элементов составной конструкции.

Дается краткое описание методик расчёта неоднородных по толщине тонкостенных конструкций в программах метода конечных элементов. В качестве основных можно указать два основных подхода: так называемые непрерывно-структурный и дискретно-структурный.

Согласно непрерывно-структурной гипотезе изменение перемещений по толщине слоистого пакета задаётся в виде непрерывной функции. Наиболее употребительная гипотеза полагает линейное изменение упругих перемещений $\mathbf{u}_{(\alpha,\beta,z)}$ по толщине многослойного пакета z :

$$\mathbf{u}_{(\alpha,\beta,z)} = \sum_{i=1}^3 \left[u_{(\alpha,\beta)z=0}^i \left(1 - z/H_{(\alpha,\beta)} \right) + u_{(\alpha,\beta)z=H}^i z/H_{(\alpha,\beta)} \right] \mathbf{e}_i, \quad (i = 1,3) \quad (3)$$

где $u_{(\alpha,\beta)z=0}^i$ и $u_{(\alpha,\beta)z=H}^i$ — компоненты осевых перемещений на лицевых поверхностях пакета; \mathbf{e}_i — единичные вектора декартовой системы координат; $H_{(\alpha,\beta)}$ — толщины пакета; α, β — параметрические координаты расчётной сетки панели, z — координата по толщине (меняется от 0 до H). Схема (3) имеет шесть узловых компонент (степеней свободы).

Дискретно-структурная гипотеза предполагает, что фактическое изменение перемещений аппроксимируется ломанной линией, линейно меняющейся по толщине каждого слоя (рисунок 2):

$$\mathbf{u}_{(\alpha,\beta,z)} = \sum_{i=1}^3 \left[u_{(\alpha,\beta)z=0}^i \left(1 - z/h_{(\alpha,\beta)k} \right) + u_{(\alpha,\beta)z=h}^i z/h_{(\alpha,\beta)k} \right] \mathbf{e}_i, \quad (k = 1,n) \quad (4)$$

где $u_{(\alpha,\beta)z=0}^i$ и $u_{(\alpha,\beta)z=h}^i$ — компоненты осевых перемещений на лицевых поверхностях k -того слоя; $h_{(\alpha,\beta)k}$ — толщина k -того слоя; n — число слоёв пакета. В схеме (4) предполагается $3 \times (n + 1)$ узловых компонент.

Для формирования максимально точной модели слоистого материала необходимо использовать соотношения трёхмерной теории упругости для каждого слоя ламината. Использование дискретно-структурного подхода для формирования расчётной модели сложной пространственной конструкции с наличием многослойных элементов приведёт к значительному увеличению числа неизвестных. В проектировочных расчётах такой подход может оказаться затратным в смысле требуемых вычислительных ресурсов. В то же время применение единой для всего пакета кинематической гипотезы может привести к существенному завышению жёсткости многослойных элементов, если в их составе есть слои, жёсткость которых мала в сравнении с остальными слоями. Преимущество линейного закона изменения перемещений по толщине заключается в том, что существенное отличие от линейного закона изменения перемещений по толщине пакета наблюдается при соотношении жесткостей слоёв порядка $1 : 10^3$ и более.

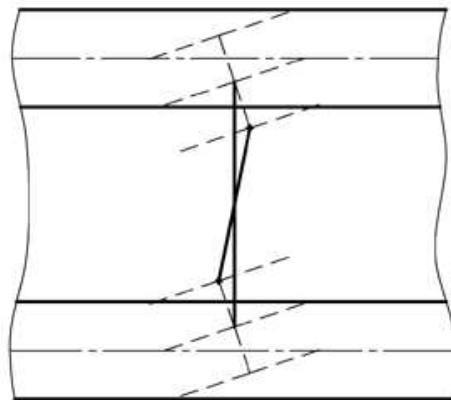


Рис. 2

Вторая глава посвящена разработке алгоритма формирования расчётного блока трёхслойных и многослойных панелей.

В проектировочных расчётах необходима модель деформирования многослойных панелей, которая бы адекватно отражала механику деформирования многослойных панелей с существенно разнородными слоями, но не приводила бы при этом к значительному увеличению размерности решаемых уравнений.

Предлагаемый алгоритм основан на формировании кинематических зависимостей, отражающих изменение упругих перемещений по толщине пакета, но не приводящих при этом к значительному увеличению размерности решаемой задачи, что важно при проектировочных расчётах многослойных тонких конструкций. Исходной является модель, в соответствии с которой изменение всех компонент перемещений между лицевыми поверхностями пакета имеет линейный характер.

Запишем перемещения $\mathbf{u}_{(\alpha,\beta,z)}$ через следующие выражение:

$$\mathbf{u}_{(\alpha,\beta,z)} = \sum_{i=1}^3 \left[u_{(\alpha,\beta)z=0}^i + \left(u_{(\alpha,\beta)z=H}^i - u_{(\alpha,\beta)z=0}^i \right) z / H_{(\alpha,\beta)} + \delta_{(\alpha,\beta)}^i f_{(z)}^i \right] \cdot \mathbf{e}_i, \quad (i = 1, 3), \quad (5)$$

где $u_{(\alpha,\beta)z=0}^i$, $u_{(\alpha,\beta)z=H}^i$ — компоненты осевых перемещений на внешних лицевых поверхностях панели, $\delta_{(\alpha,\beta)}^i$ — некоторые дополнительные неизвестные; $f_{(z)}^i$ — некоторые функции по координате z по толщине пакета, характер которой зависит от соотношения жесткостей и толщин слоёв.

Схема (5) имеет девять узловых компонент. Три компоненты $\delta_{(\alpha,\beta)}^i$ будут добавлены к шести компонентам $u_{(\alpha,\beta)z=0}^i$, $u_{(\alpha,\beta)z=H}^i$ схемы (5) и общее количество узловых переменных становится равным девяти.

Для того, чтобы проведение расчётов напряжённо-деформированного состояния стало возможным, требуется знать функции $f_{(z)}^i$.

Положим производные $f'_{(z)}$ постоянными для каждого слоя и получим следующие простые выражения:

$$f_{(k)} = \sum_{j=1}^{k-1} f'_{(j)} h_j; \quad \sum_{k=1}^n f'_{(k)} h_k = 0, \quad (f'_{(z=0)} = 0, f'_{(z=H)} = 0). \quad (6)$$

Здесь h_k — толщина k -ого слоя, n — число слоёв пакета.

В случае если нам известны все узловые компоненты $u_{0(\alpha,\beta)z=0}^i$, $u_{0(\alpha,\beta)z=H}^i$, $\delta_{0(\alpha,\beta)}^i$, то становится возможным собрать уравнения равновесия в матричной форме, используя следующее аналитическое выражение перемещений:

$$\mathbf{u}_{(\alpha,\beta,z)} = \sum_{i=1}^3 \left[u_{0(\alpha,\beta,z)}^i + \delta_{0(\alpha,\beta)}^i f_{(z)}^i \right] \cdot \mathbf{e}_i. \quad (7)$$

Размер разрешающих матриц составляет $3n \times 3n$ для каждого узла расчётной сетки пакета. Сравнение элементов локальных матриц жёсткости, сформированных относительно неизвестных $f'_{(k)}$ для тонких слоистых конструкций показывает, что составляющие от энергии поперечного сдвига являются превосходящими на 2 — 3 порядка составляющие от энергии изгиба. Кроме того, соотношение (6) показывает, что задача заключается в определении характера изменения $f'_{(k)}$ по слоям пакета, но не их абсолютных значений.

На основании этих замечаний проведём решение локальной задачи по определению по следующему алгоритму $f_{(k)}^{i/}$ в матричной форме. Для общности сохраним все три компонента искомой функции $f_{(k)}^{i/}$, ($i = 1, 2, 3$). Обозначим $X = f_{(1)}^{i/}$, $U = (f_{(2)}^{i/}, f_{(3)}^{i/}, \dots, f_{(n)}^{i/})$ и запишем уравнение (6) в следующей матричной форме:

$$X + G U = 0, \quad (8)$$

где G — прямоугольная матрица $3 \times (n - 1)$. Воспользуемся условием минимума энергии поперечной деформации сдвига и обжатия, согласно которой вектор U должен обеспечить минимум величины

$$L = \sum_{j=1}^n 0,5 \left[4 C^{\alpha 3 \alpha 3} (e_{\alpha 3} + e_{0 \alpha 3}) (e_{\alpha 3} + e_{0 \alpha 3}) + C^{3333} (e_{33} + e_{033}) (e_{33} + e_{033}) \right] h_j \rightarrow \min, \quad (\alpha = 1, 2) \quad (9)$$

где $C^{\alpha 3 \alpha 3}$, C^{3333} — компоненты тензора жесткостных характеристик сдвига и обжатия слоя; $e_{0 \alpha 3}$, e_{033} представляют некоторые предварительные значения деформаций поперечного сдвига и обжатия, постоянные в расчётной точке координатной поверхности пакета; поперечные деформации $e_{\alpha 3}$, e_{33} могут быть записаны в следующем виде $2 e_{\alpha 3} = (\partial \mathbf{u} / \partial \alpha) \mathbf{n} + (\partial \mathbf{u} / \partial z) \mathbf{r}_{\alpha}$, $e_{33} = (\partial \mathbf{u} / \partial z) \mathbf{n}$ (\mathbf{r}_{α} и \mathbf{n} — базисные векторы и вектор нормали координатной поверхности пакета). Компоненты деформаций e_{i3} в координатах слоя связаны с компонентами деформаций ε_{i3} в координатах пакета

$$e_{i3} = d_i^k d_3^3 \varepsilon_{k3}, \quad (i, k = 1, 3) \quad (10)$$

где d_i^k — элементы матрицы связи систем координат.

Представим условие (9) с учётом соотношений (8) в матричной форме:

$$L = \frac{1}{2} (X)^T Q (X) + \frac{1}{2} (U)^T R (U) + (X, U)^T (C_1, C_{2-n}) \rightarrow \min. \quad (11)$$

Вектор U , минимизирующий величину L определяется выражением

$$U = -(R + G^T Q G)^{-1} C, \quad (12)$$

где $C = C_{2-n} - G^T C_1$, матрица $R + G^T Q G$ имеет размерность $3(n-1) \times 3(n-1)$. Для уменьшения вычислительных операций найдём вектор U , используя схему

$$U = [A(E + GA)^{-1} G - E] R^{-1} C, \quad (13)$$

где E — единичная матрица; $A = R^{-1} G^T Q$. Схема (13) требует намного меньше вычислений по сравнению со схемой (12), если только обратная матрица R^{-1} вычисляется легко. Размерность матриц E , GA определяется числом уравнений (6), в нашем случае 3×3 .

После вычислений U можно определить $X = -G U$.

Полученные векторы X , U (или тоже самое $f_{(k)}^{i/}$, ($k = 1, n$)) определяют темп изменения компонент перемещений в каждом слое пакета. После этого мы можем сформировать и решить матричные уравнения, основанные на кинематической схеме (5), используя алгоритмы и программы метода конечных элементов.

Проведённые расчёты показывают, что характер изменения значений $f_{(k)}^{i/}$ по слоям зависит от соотношения толщин, жёсткости слоёв в пакете, но не зависят от величин $e_{0 \alpha 3}$, e_{033} . Это означает, что производные $f_{(k)}^{i/}$ могут быть вычислены до решения общей задачи расчёта многослойной тонкой конструкции. В случае

плоского слоистого пакета можно вообще обойтись без дополнительных итераций по уточнению $f_{(k)}^{i/}$. При одинаковых относительных значениях толщин, жесткостей слоёв и геометрических параметрах в расчётных точках достаточно решить локальную задачу в одной расчётной точке, а полученные значения использовать для всех остальных при формировании разрешающих матриц.

Покажем, как меняется характер величин $f_{(k)}^{i/}$, $f_{(k)}$ в зависимости от соотношения жесткостей. Примем $E_k = 1$; $h_k = \text{const}$; $\left(\sum_{k=1}^n h_k = H\right)$. Получим $f_{(k)}^{i/} = 0$. Примем для $n = 3$: $E_{1,3} = 1$; $E_2 = 0,5$. Получим $f_{(1,2,3)}^{i/} = 1; -2; 1$. Если положить $E_{1,3} = 1$, $E_2 = 10^{-5}$, то получим те же значения $f_{(1,2,3)}^{i/}$. Для $n = 5$: $E_{1,3,5} = 1$; $E_{2,4} = 0,5$, получим $f_{(1,2,3,4,5)}^{i/} = 1; -1,5; 1; -1,5; 1$. Для $n = 9$ с таким же чередованием коэффициентов E_k будем иметь $f_{(1,2,3,4,5,6,7,8,9)}^{i/} = 1; -1,25; 1; -1,25; 1; -1,25; 1; -1,25; 1$. Изменение соотношения толщин слоёв также влияет на характер распределения величин $f_{(k)}^{i/}$. Функции $f_{(k)}^{i/}$ и $f_{(k)}$ могут быть рассчитаны для пакета с любым соотношением жесткостей и толщины слоёв. На рисунке 3 показан характер изменения функции $f_{(k)}$ для пакета из 18 слоёв с чередующимися значениями коэффициента жёсткости $E_k = 1; 0,5; 1; 0,5; \dots; 1$.

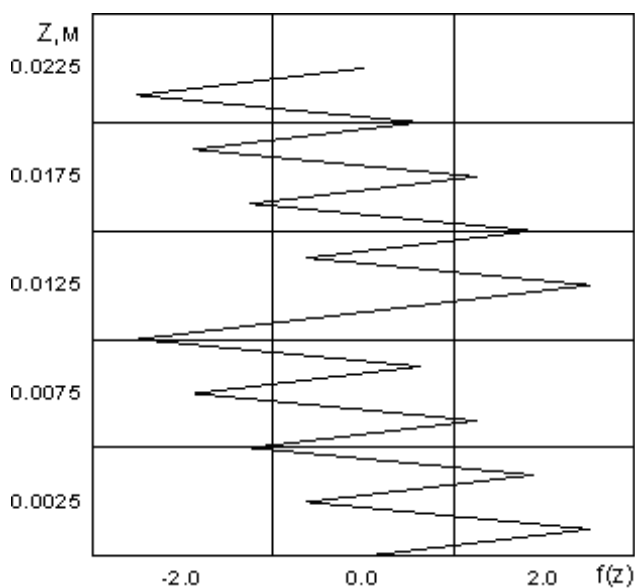


Рис. 3

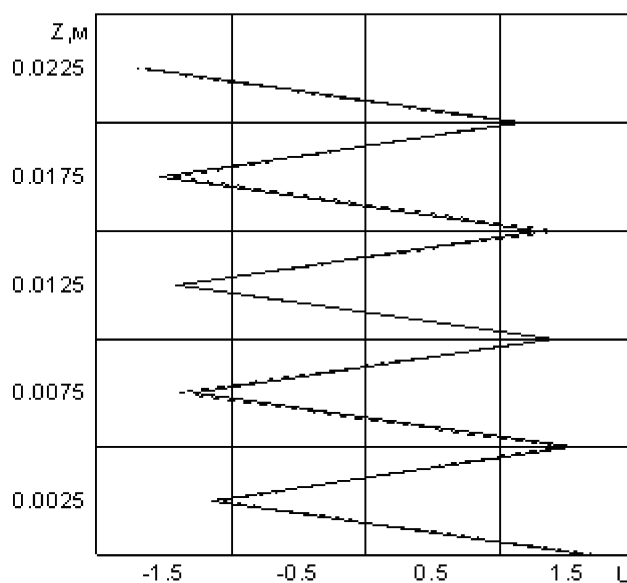


Рис. 4

Для оценки адекватности предложенной кинематической гипотезы (5) проводилось её сравнение с дискретно-структурной схемой, а также с решением, полученным в МКЭ-комплексе ANSYS.

Покажем как соотносятся решения, полученные по разным кинематическим схемам на примере расчёта панели из девяти слоёв, нагруженной равномерной поперечной нагрузкой, для двух случаев $E_{1,3,5,7,9} = 1$; $E_{2,4,6,8} = 0,5$ и $E_{1,3,5,7,9} = 1$; $E_{2,4,6,8} = 10^{-5}$. В первом случае значения вектора упругих перемещений для всех схем отличаются в четвёртом знаке после запятой, например перемещение по нормали в центре пластины равно $0,53617 \times 10^{-2}$ м; $0,53666 \times 10^{-2}$ м;

$0,53697 \times 10^{-2}$ м для схемы (3) с шестью степенями свободы в узле, предлагаемой схемы (5) и дискретно-структурной схемы (4) соответственно. Тангенциальные перемещения в первом случае также отличаются в четвёртом знаке после запятой. Для одного из узлов сетки одна из тангенциальных компонент перемещений для указанных схем равна соответственно $u_{z=0, z=H}^{(1)} = \pm 0,54183 \times 10^{-4}$ м; $u_{z=0, z=H}^{(1)} = \pm 0,54173 \times 10^{-4}$ м; $u_{z=0, z=H}^{(1)} = \pm 0,54159 \times 10^{-4}$ м.

Гипотеза линейного изменения компонент перемещений по толщине пакета работает до определённого соотношения жесткостных характеристик, поэтому во втором случае, когда жёсткости некоторых промежуточных слоёв пренебрежимо малы, гипотеза линейного изменения перемещений не даёт решения.

На рисунке 4 приведено изменение тангенциальной компоненты перемещений по толщине пакета z для предлагаемой схемы (5) и дискретно-структурной схемы (пунктирная линия). Можно видеть, что кинематическая схема деформирования (5) в отличие от гипотезы прямой линии работает при любом соотношении жесткостей слоёв в пакете.

На рисунке 5 приведены относительные значения нормальных напряжений по толщине пакета из девятнадцати слоёв с соотношением жесткостей $E_{1,3,5,7,9,11,13,15,17,19} = 1$; $E_{2,4,6,8,10,12,14,16,18} = 10^{-3}$ для схемы с шестью степенями свободы — пунктирная линия; для схемы (5) с девятью степенями свободы — линия, отмеченная чёрными кружочками; для дискретно-структурной схемы — линия, отмеченная треугольниками. Такие же зависимости для соотношения жесткостей слоёв $E_{1,3,5,7,9,11,13,15,17,19} = 1$; $E_{2,4,6,8,10,12,14,16,18} = 10^{-5}$ приведены на рисунке 6. Можно видеть что напряжения, полученные с использованием кинематической гипотезы (5) близки к значениям, полученным с использованием дискретно-структурной модели, а гипотеза линейного изменения перемещений по толщине пакета даёт только качественный характер распределения нормальных напряжений по толщине.

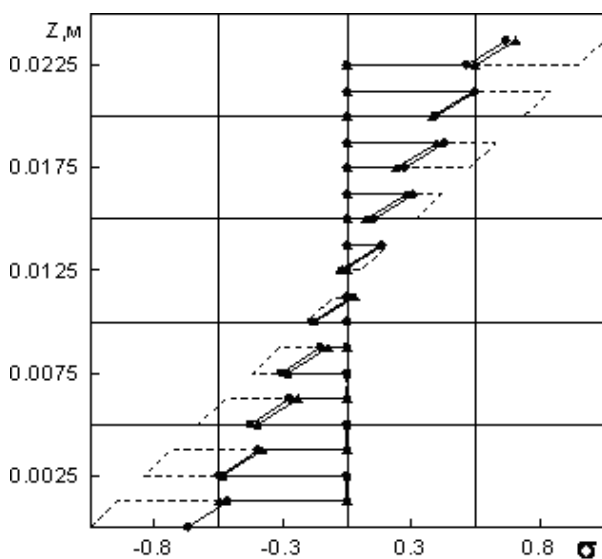


Рис. 5

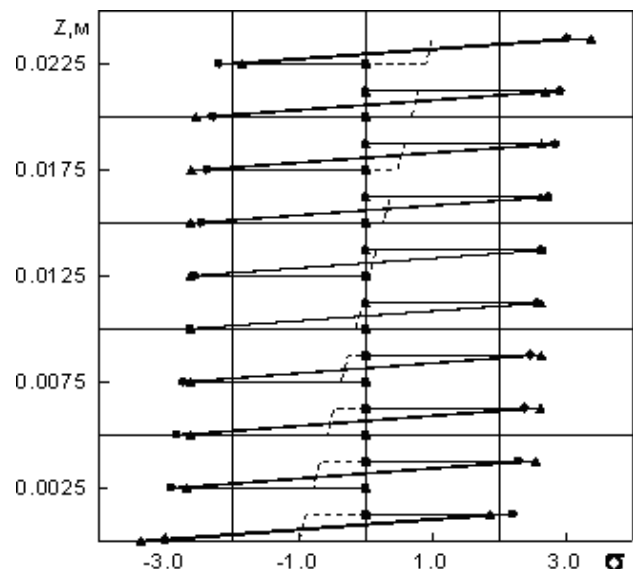


Рис. 6

На рисунке 7 показаны относительные значения напряжений по толщине пакета из одиннадцати слоёв со следующим отношением толщин 2-1-2-1-2-3-2-1-2-1-2 и соотношением жесткостей $E_{1,3,5,7,9,11} = 1$; $E_{2,4,6,8,10} = 10^{-3}$, по которым можно сравнить получаемые решения для пакета со слоями разной толщины.

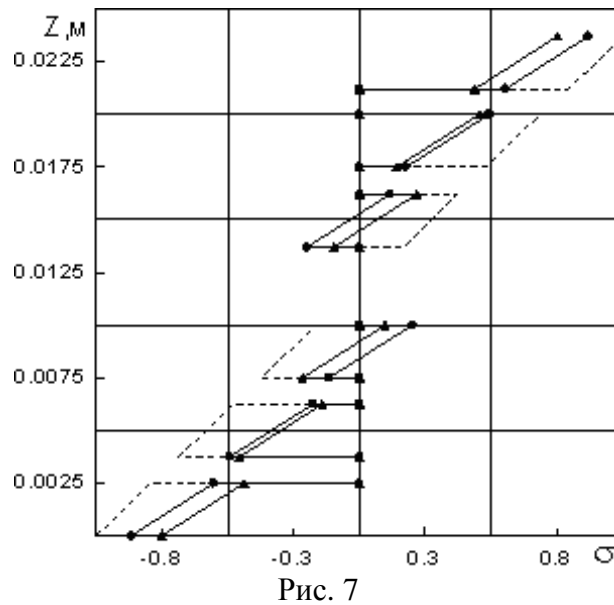


Рис. 7

Сравнение результатов расчёта ANSYS со схемой (5) также показало, что максимальная разница значений тангенциальных перемещений составляет примерно 5 - 8 % (рисунок 8); а нормальные напряжения в жёстких слоях отличаются на 1 - 4 % (рисунок 9). Максимальный прогиб пластины, полученный по предложенной схеме (5) равен $0,369 \times 10^{-3}$ м, в программном комплексе ANSYS — $0,356 \times 10^{-3}$ м (разница около 3,5 %).

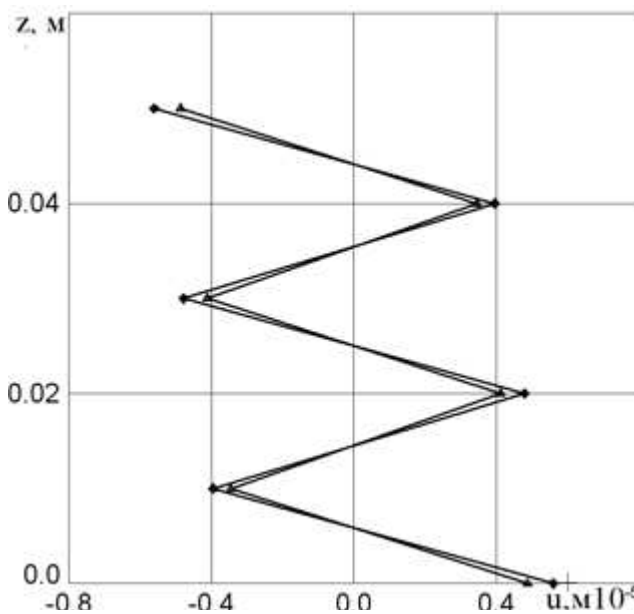


Рис. 8

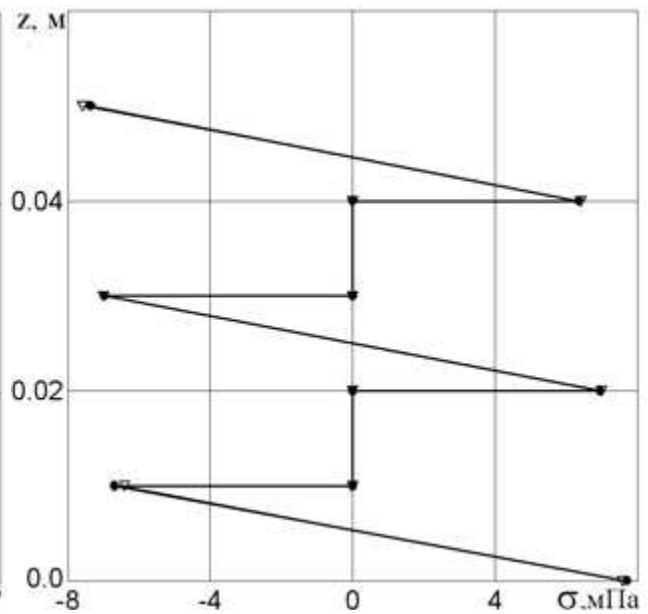


Рис. 9

Конечно, схема (5) и априорное вычисление функции $f^i_{(z)}$ позволяет получить, некоторое приближённое решение. Тем не менее, проведённые

расчёты с самыми разнообразными вариантами сочетания толщин и жесткостей слоёв показывают, что полученные решения остаются приемлемыми для проектировочных расчётов.

На основании проведённых расчётов можно судить об эффективности алгоритма проектировочного расчёта тонких многослойных панелей с существенно разнородными слоями с использованием схемы (5) и априорного вычисления функции изменения упругих перемещений по толщине слоистого пакета $f^i(z)$. Можно ожидать, что преимущества данного алгоритма с точки зрения экономии вычислительных ресурсов будут ещё ощутимее при решении задач, связанных с многократным решением матричных уравнений равновесия, например, в динамических проектировочных расчётах.

Во второй части главы описывается алгоритм определения напряжённо-деформированного состояния тонкостенной слоистой конструкции. Алгоритм решения задачи устойчивости элементов тонкостенной конструкции излагается на основе как классического подхода, так и не классического, который базируется на решении нелинейных уравнений равновесия. Неклассический подход позволяет учесть предварительное НДС конструкции.

Матричное уравнение с переменной матрицей жёсткости для определения критического параметра потери устойчивости записывается так:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} f_{1,1} & \dots & 0 & f_{1,j} & \dots & -p_1 \\ \dots & \dots & 0 & \dots & \dots & -p_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & 0 & \dots & \dots & -p_j \\ f_{n,1} & \dots & 0 & f_{n,j} & \dots & -p_n \\ \hline f_{i,1} & \dots & 0 & f_{i,j} & 0 & -p_i \end{array} \right] \begin{Bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_i \\ x_j \\ x_n \\ \delta p \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -x^* f_{11} \\ \dots \\ x^* \\ \dots \\ -x^* f_{j,1} \\ -x^* f_{n,1} \end{Bmatrix} \quad (14)$$

Решение нелинейного матричного уравнения (14) при заданном малом возмущении x^* и внешней нагрузке p даёт смежную с исходной форму равновесия и параметр нагрузки δp , который и определяет критический параметр нагрузки потери устойчивости. Возмущение x^* задаётся для той компоненты вектора обобщённых перемещений, которая определяет ожидаемую форму смежного равновесного деформированного положения конструкции. Задаётся только одна компонента вектора перемещений, которая определяет деформирование конструкции. В связи с этим, конструкции не присваивается форма потери устойчивости. Данный подход определяет непосредственно критический параметр δp за несколько итераций, и не требует вычисления докритического напряжённого состояния.

Описывается алгоритм определения частот и форм собственных колебаний слоистых панелей, в том числе предварительно напряжённых и деформированных. Описывается механизм изменения эффективных жесткостных характеристик панелей, имеющих предварительную напряжённость.

В третьей главе представлены результаты расчётно-экспериментальных исследований на растяжение, изгиб и комбинированное нагружение торсиона несущего винта лёгкого вертолёта КАИ-82.

Исследуемый торсион (рисунок 10) состоит из трёх основных участков: комлевой, рабочего и концевой. Комлевой и концевой участки представляют собой композитные конструкции из стеклопластика. Рабочей частью конструкции торсиона является упруго-деформируемый участок, представляющий собой многослойную структуру, состоящую из чередующихся слоёв стеклопластика и резины. Именно к упругому элементу торсиона предъявляются особые требования по прочности и обеспечению ресурса.

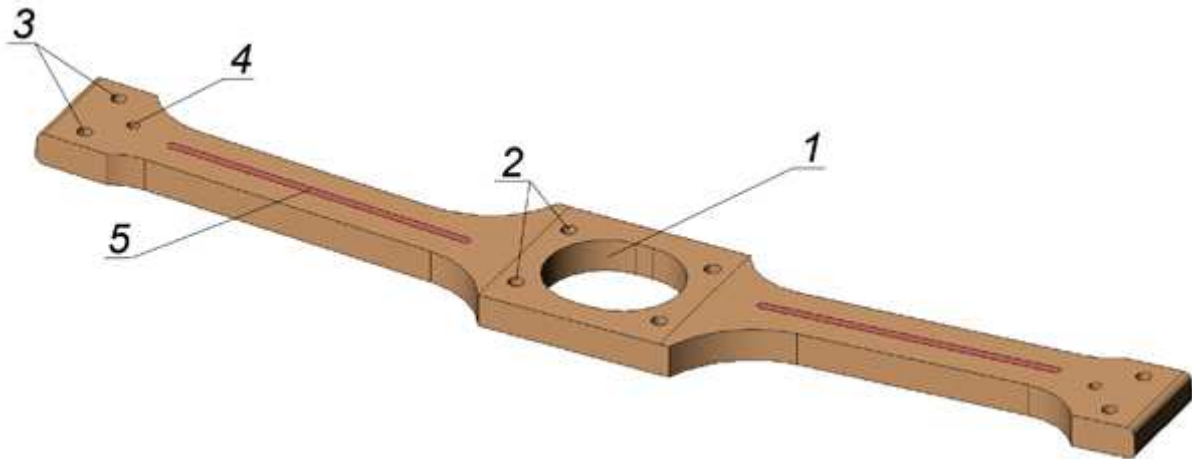


Рис. 10. Трёхмерная модель торсиона

В плане торсион образует многосвязную область, содержащую 10 круглых и одно центральное отверстие в форме овала, а также две продольные прорези с галтелями на концах. В круглые отверстия, расположенные на концах торсиона (поз. 3, 4 рисунок 10), запрессовываются стальные втулки, через которые к торсиону крепятся переходники лопастей. Через круглые отверстия в центральной части (поз. 2 рисунок 10) торсион крепится на валу винта и загружается крутящим моментом, приходящим от системы управления (отв. 3, 4 рисунок 10). Большое центральное отверстие (поз. 1 рисунок 10) имеет овальную в плане форму, что позволяет торсиону совершать колебания в продольной плоскости. Продольная прорезь (поз. 5 рисунок 10) снижает крутильную жёсткость торсиона.

Была проведена серия тестовых экспериментов по исследованию напряжённо-деформированного состояния торсиона при приложении базовых нагрузок (к свободному концу торсиона). В тестовые эксперименты входило:

- нагружение торсиона несущего винта центробежной силой $P_x = 5\,000\text{ Н}$. Нагрузка прикладывалась по оси торсиона;
- нагружение торсиона изгибом в плоскости тяги силой $P_z = -1000\text{ Н}$. Сила прикладывалась по оси крайних втулок;
- нагружение торсиона изгибом в плоскости вращения силой $P_x = 1500\text{ Н}$.
- комбинированное нагружение торсиона изгибом в двух плоскостях, кручением $M_{кр} = 75\text{ Н}\cdot\text{м}$ и центробежной силой $P_x = 32\,000\text{ Н}$.

Описывается математическое моделирование упругого элемента торсиона

вертолёта в МКЭ-комплексе ANSYS. В поперечном направлении исследуемая конструкция представляет собой пакет слоёв, выполненных из различных материалов (стеклопластик, резина) с относительно небольшой толщиной каждого слоя. Так как свойства отдельных слоёв существенно отличаются как по прочностным, так и жесткостным характеристикам, то при осреднении их свойств по толщине в рамках единой кинематической гипотезы значительная погрешность вносится в описание напряжённо-деформированного состояния всего пакета. Поэтому в настоящем расчёте используется трёхмерная модель с набором конечных элементов по толщине, число которых равно числу слоёв из значительно отличающихся материалов. Так как число слоёв велико, а размеры малы, то вполне оправданно использовать в поперечном направлении лишь линейную аппроксимацию. Таким образом, базовым в расчётах исследуемой конструкции принимается трёхмерный конечный элемент с квадратичной аппроксимацией по двум координатам и линейной — по третьей координате. В качестве такого конечного элемента в комплексе ANSYS выберем Solid 95, который также позволяет учитывать анизотропию материала.

Расчётная схема торсиона в МКЭ-комплексе ANSYS представляет собой трёхмерное тело, образуемое в поперечном сечении последовательно чередующимися слоями из различных материалов. Задача расчёта торсиона симметричная, поэтому моделируется только одна половина торсиона. Укладка материалов по толщине распределяется равномерно. При моделировании стеклопластиковых слоёв, состоящих из нескольких слоёв стеклоткани (расположенных под углом $\pm 45^\circ$), использовался слоистый конечный элемент (Shell 91), в котором автоматически учитывается изменение ориентации укладки и вычисляются приведённые жёсткости.

На рисунке 11 представлена сетка конечных элементов и сетка узлов торсиона, построенная в программе ANSYS.

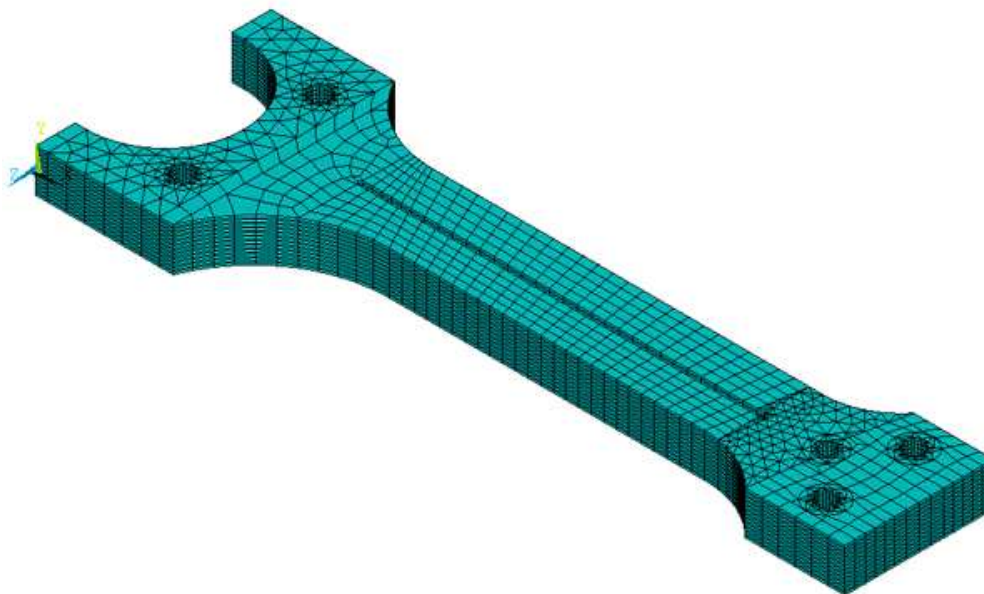


Рисунок 11. КЭ модель торсиона.

Далее задавались граничные условия (закрепление торца втулки на левом краю) и различные нагружения, которые прикладывались ко втулкам крайних отверстий.

Результаты моделирования показаны на рисунке 12.

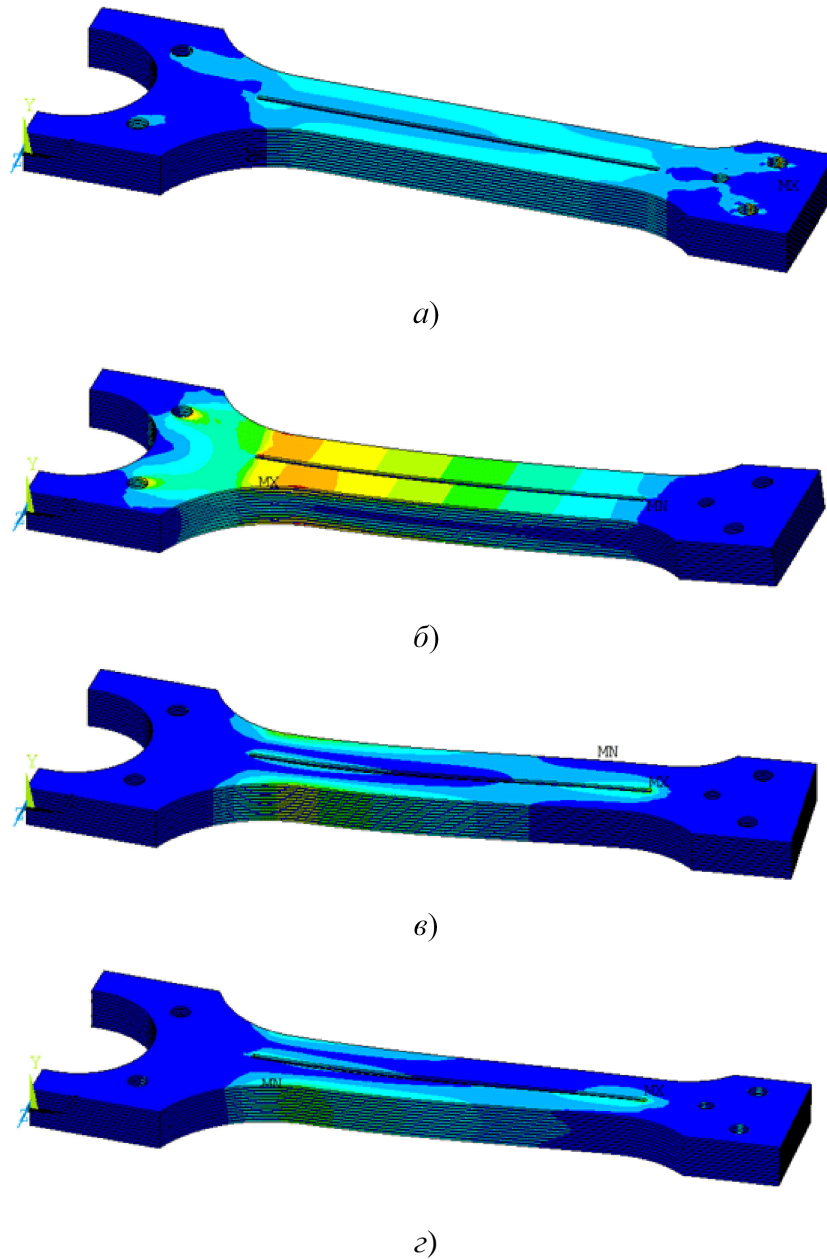


Рисунок 12. Напряжённо-деформированное состояние торсиона:

а) от растяжения центробежной силой; б) от изгиба в плоскости тяг; в) от изгиба в плоскости вращения; г) от комбинированного нагружения.

Значения максимальных деформаций консоли торсиона представлены в таблице.

Вид нагружения	Численное моделирование	Дискретно-структурный подход	ANSYS	Экспериментальные значения
Изгиб в плоскости тяг	$0,23 \times 10^{-2}$	$0,20 \times 10^{-2}$	$0,19 \times 10^{-2}$	$0,29 \times 10^{-2}$
Изгиб в плоскости вращения	$0,014 \times 10^{-2}$	$0,012 \times 10^{-2}$	$0,012 \times 10^{-2}$	$0,017 \times 10^{-2}$
Растяжение	$0,18 \times 10^{-2}$	$0,16 \times 10^{-2}$	$0,158 \times 10^{-2}$	$0,21 \times 10^{-2}$

Из анализа выходных данных видно, что результаты, полученные различными расчётными методами различаются между собой незначительно, в

пределах 3 — 8 %. При этом результаты натурных испытаний торсиона отличаются от соответствующих результатов численного моделирования более существенно. Так, например, значения изгибных деформаций полученные экспериментально больше примерно на 12 — 18 %, чем изгибными деформациями, рассчитанные численно. Такое положение свидетельствует скорее всего о возможном некотором несоблюдении технологии при изготовлении торсиона, что в итоге сказалось на его механических характеристиках. Разница между расчётными значениями деформаций и экспериментальными данными составляет в среднем 15 %.

Математическая модель, основанная на предложенной нами кинематической гипотезе, продемонстрировала на тестовых расчётах достаточно высокую точность.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ

1. Предложены алгоритмы формирования матричных уравнений равновесия сложных составных конструкций, учитывающих конечность перемещений.

2. Разработаны алгоритмы проектировочного расчёта составных тонкостенных слоистых конструкций при действии статической и динамической нагрузки. Предложенные алгоритмы адекватно отражают механику деформирования многослойных панелей с существенно разнородными слоями, и при этом не приводят к значительному увеличению размерности решаемых уравнений.

3. Проведено математическое моделирование поведения тонкостенных слоистых структур в зависимости от соотношения жесткостных характеристик отдельных слоёв. Осуществлены численные исследования статической прочности, устойчивости, частот и форм собственных колебаний элементов таких конструкций. Моделирование показало, что применение гипотезы линейного изменения перемещений по толщине пакета при определении напряжённо-деформированного состояния справедливо только при соотношении жесткостей слоёв до $E_1 \approx E_2 \cdot 10^{-2}$, при большей разности такая гипотеза даёт завышенное значение жесткости конструкции, поэтому в случае $E_1 \gg E_2$ необходимо использовать соотношения теории упругости для каждого слоя ламината в отдельности.

4. На основе разработанных моделей и алгоритмов создан модуль программного комплекса для проектировочных расчётов составных тонкостенных слоистых конструкций с автоматизацией процедуры подготовки исходных данных и анализа результатов проектировочных расчётов.

5. Разработанные модели и алгоритмы были использованы при проектировочных расчётах упругого рабочего элемента торсиона лёгкого вертолёта КАИ-82. Сравнение результатов расчёта и эксперимента при приложении тестовых базовых нагрузок показывает, что предложенная кинематическая гипотеза, и созданное на её основе программное обеспечение, позволяет рассчитать напряжённо-деформированное состояние многослойных несущих систем с достаточной для инженерных расчётов точностью.

6. Приведена оптимизация численных алгоритмов для решения задач проектирования большой размерности.

7. Полученные результаты используются для проведения опытно-конструкторских работ, направленных проектирование и расчёт образцов тонкостенных слоистых конструкций, в том числе с существенно разнородными слоями.

Основное содержание диссертации опубликовано в следующих работах:

В научных журналах, рекомендованных ВАК:

1. Гайнутдинова Т.Ю., Першин Е.А. Об одном алгоритме проектировочных расчётов пространственных тонкостенных конструкций. Вестник КГТУ. 2008. №4. с. 77-79.

2. Гайнутдинова Т.Ю., Першин Е.А. К расчёту слоистых панелей с существенно разнородными слоями. Вестник КГТУ 2011. №1. с. 5-7.

В материалах научных конференций:

3. Першин Е.А., Рамазанов Р.В. Программный комплекс для проектировочных расчётов пространственных стержневых конструкций. Информационные технологии в науке, образовании и производстве: Материалы Всероссийской научной конференции. 30 - 31 мая 2007 года. Казань: Изд-во Казан. гос. техн. Ун-та, 2007. с. 120-12.

4. Першин Е.А. О расчёте многослойных панелей. Современные технологии и материалы — ключевое звено в возрождении отечественного авиастроения. Материалы Международной научно-практической конференции. Т. I. Казань, 10-11 августа 2010 года. Казань: Изд-во Вертолёт, 2010. с. 264-267.

5. Першин Е.А., Абдуллин И.Н. Исследование статического и динамического поведения слоистых структур. Проблемы и перспективы развития авиации, наземного транспорта и энергетики. Материалы VI Международной научно-технической конференции. Т. I. Казань, 12-14 октября 2011 года. Казань: Изд-во КГТУ-КАИ, 2011. с. 159-163.

Формат 60x84 1/16. Бумага офсетная. Печать офсетная
Печ. л. 1,0. Усл. печ. л. 0,93. Уч.-изд. л. 0,89.
Тираж 100. Заказ О 178.

Типография Казанского государственного технического университета
420111 Казань, К. Маркса, 10